H. 嘉当

微　分　学

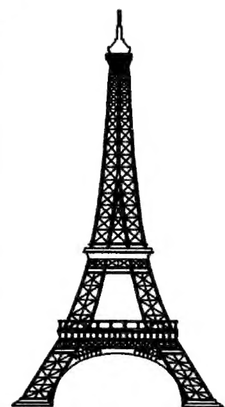
附习题

J. 库奈埃 序

- 新修订版，1977. 第二次印刷，1982；重印，2007.
- 第1版，1967，Hermann，293 rue Lecourbe，75015 Paris.
- C. Buttin 夫人及 F. Rideau 与 J. L. Verley 先生是本书习题的作者. 本书第1版是1966年9月编成的，习题是在1967年4月编成的.

关键词：

- 可微映射
- 微分学
- 函数或映射的凸性
- 高阶微分
- 微分方程
- 巴拿赫空间
- 极值
- 隐函数或隐映射
- 微分形式
- 有限增量定理



法兰西数学
精品译丛

数学天元基金资助项目

微分学

□H. 嘉当 著
□余家荣 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图字: 01-2008-2673 号

Henri Cartan
Cours de Calcul Différentiel
Nouveau triage 2007

图书在版编目（CIP）数据

微分学／（法）嘉当（Cartan,H.）著；余家荣译. —北京：高等教育出版社，2009.4
（法兰西数学精品译丛）
ISBN 978－7－04－025156－2

Ⅰ.微… Ⅱ.①嘉… ②余… Ⅲ.微分学－研究生－教材 Ⅳ.O172.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 013175 号

策划编辑 王丽萍 **责任编辑** 李 鹏 **封面设计** 王凌波
责任绘图 吴文信 **版式设计** 陆瑞红 **责任校对** 刘 莉
责任印制 宋克学

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
总 机 010－58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本 787×1092 1/16
印 张 22.25
字 数 460 000

购书热线 010－58581118
免费咨询 800－810－0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
畅想教育 http://www.widedu.com

版 次 2009 年 4 月第 1 版
印 次 2009 年 4 月第 1 次印刷
定 价 48.00 元

物料号 25156－00

《法兰西数学精品译丛》编委会

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦兹及利翁斯等等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的薰陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等

教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 5 月

序

泛函分析是数学的一个分支, 特别是分析中研究函数空间的一个分支. 它在历史上的根源在变换的研究中, 例如在傅里叶变换的研究中, 并且也在微分方程的研究中.

"泛函" 这一名词起源于变分学的研究中, 它是用来表示自变量是函数的函数的. 意大利数学家兼物理学家维多 · 沃尔泰拉把泛函的应用推广到新的领域. 波兰数学家斯提凡 · 巴拿赫常被认为近代泛函分析的奠基人.

本书目的是引进巴拿赫空间中微分学及微分方程的基础, 同时使读者熟习微分形式、变分学原理以及活动标架法对曲线与曲面的应用等概念. 本书首先回顾讲述以下各章中概念所必需的一些预备知识: 巴拿赫空间, 可微映射, 有限增量, 隐映射, 阶的定理, 高阶微分, 可微凸映射, 直纹映射, 泰勒公式, 相对极值, 微分方程, 微分形式, 活动标架等.

巴拿赫空间是巴拿赫为了解含无穷个变量的方程组, 约在 1930 年提出的. 为了解未知变量的个数没有确定的问题, 例如函数的向量空间, 巴拿赫空间是一个相当自然的框架.

巴拿赫空间被定义为完备的赋范向量空间. 换句话说, 巴拿赫空间是实或复数域上的一种向量空间 V, 它带有满足一定条件的一个范数 $\|\cdot\|: V$ 中 (关于度量 $d(x,y)=\|x-y\|$ 的) 任何柯西序列在 V 中有一极限. 由于范数导出了向量空间上的一种拓扑, 巴拿赫空间是拓扑向量空间的一种实例.

本书也论述了微分形式, 并且应用它们研究曲面微分几何的整体及局部的某些性质. 几何计算及微分形式以格拉斯曼代数作为它们共同的起源; 但是它们的历史发展不同, 必须要经历时间才能使数学家们懂得它们两者属于同一数学体系.

嘉当的外微分形式理论的重要性在于下列事实: 在关于 C^1 类可微映射的映射代换和 "拉回" (SF-PB) 情况下, 一个 M 维初始流形变到终态成为一个 N 维流形,

这时微分形式是完全确定的. 映射不必有逆映射 (或可逆的雅可比, 既然初始流形与终态流形的维数不同).

与张量分析理论大不相同的是: 在张量分析中, 必须加上种种条件, 因为映射与逆映射以及可微映射与可微逆映射在张量分析中都是必要的.

这些映射称为微分同胚, 而当物理学家应用它们时则称为坐标变换. 一个在终态为零的张量, 在初始态也是零; 对于张量, 初始态与终态必须由微分同胚联系着. 微分形式超越了张量演算, 而且包含后者作为特别情形.

注意微分形式统一并简化了多变量的变分学. 对这个课题有兴趣的学生们从本书中, 会比用通常方式, 能更好地理解有关概念.

最后, 在本书末章, 为了研究浸入在 R^3 中曲面的局部微分几何以及曲面的内蕴几何, 作者发挥了 E. 嘉当的活动标架法.

在数学中, 活动标架是向量空间内有序基概念的一种推广; 这种基往往用来研究浸入在齐性空间中连续流形的内蕴微分几何. 活动标架首先是由 G. 达布在十九世纪引进, 是用来研究浸入在欧氏空间中曲线的弗雷内 — 塞雷特标架的. 后来, E. 嘉当以及其他数学家使活动标架法成熟了, 用它来研究更一般的齐性空间 (例如射影空间) 中的子流形①.

E. 嘉当的活动标架法建立在这种观念上: 考虑一种适应于所研究特别问题的活动标架. 例如已给空间一曲线, 曲线所导出的前三个向量一般可在曲线上一点提供一个标架. 更一般地, 活动标架可看作一些开集 U 上主要纤维的截口. 嘉当用他的一般方法, 结合他的联络概念, 探讨了这种抽象问题.

最常遇到的活动标架情形是流形的切标架的纤维情形. 在这种情形, 流形 M 上的活动切标架是由一组向量 $X_1, \cdots, X_n$ 的场构成的; 这些向量在开集 $U \subset M$ 中每点形成切空间的一个基.

总可在局部即在 M 中任何点 p 的邻域内确定一活动标架. 但是要在 M 上有整体活动标架, 必须加上拓扑的条件. 例如当 M 是圆, 或更一般地是环面时, 可以确定这种类型的标架. 相反地, 当 M 是二维球面时, 这就不可能了. 有整体活动标架的流形叫做可平行化的.

本书内容正好包含了数学的一些纯粹分支和应用分支. 特别对于准备教师考试的学生, 对于准备获得硕士阶段微分学学分的学生②, 以及对于教师, 书中把内容逐步展开的方式都是有用的. 对于学工程的学生以及理论物理学者, 本书也很有用. 书中正文由许多例子阐明, 并且每一部分都包含一些程度不同的习题.

本书可用作参考书和优秀的数学习题集.

J. 库奈埃 (Joseph Kouneiher)

①F. 埃兰 (Frédéric Hélein) 证明了: 为了证明在无对称情形下正规性的结果, 库伦 (Coulomb) 的活动标架的新概念可以起着关键性的作用.

②法国大学通过四年学习可得硕士学位.

目录

上编　微　分　学

下编 微分形式

上编　微　分　学

第一章　巴拿赫空间中的微分学

1.　关于巴拿赫空间及连续线性映射概念的回顾

在下面, 基础域 $\mathbb{K}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$. 假定关于向量空间的定义和它们的初等性质是已知的. 我们记得: 如果 E 是复向量空间 (即在域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间), 那么 E 具有隐含的实向量空间的结构: 现限于考虑向量 $x(\in E)$ 及数量 $\lambda(\in \mathbb{R})$ 的乘积 λx.

1.1.　向量空间 E 上的范数

范数是满足下列条件的映射 $\rho : E \to \mathbb{R}^+$($\mathbb{R}^+$ 表示大于或等于零的实数集):

(i) $\rho(0) = 0$;

(i′) $(\rho(x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$;

(ii) $\rho(x + y) \leqslant \rho(x) + \rho(y), \forall x, y \in E$

(iii) $\rho(\lambda x) = |\lambda| \cdot \rho(x), \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{K}$

带有已给范数的向量空间 (简记作 e.v. 即法文 espace vectoriel 的编写) 称为赋范向量空间 (赋范 e.v.). 当范数 ρ 这样给定时, 往往把向量 x 的范数值 $\rho(x)$ 记作 $\|x\|$. 采用这种记号, 条件 (i) 至 (iii) 写成:

(i) $\|0\| = 0$;

(i′) $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$;

(ii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

(iii) $\|\lambda x\| \leqslant |\lambda| \cdot \|x\|$.

设 E 是一赋范 e.v.; 用下列公式定义 E 中两点 x, y 的距离:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

由于由 (iii) 可得 $\|x-y\| = \|y-x\|$ [把 x 换成 $(x-y)$, 把 λ 换成 -1], 我们有 $d(x,y)=d(y,x)$. 又由 (ii) 可立即推出

$$d(x,z) \leqslant d(x,y)+d(y,z)$$

("三角不等式"). 最后, $d(x,y)=0$ 必须而且只须 $x=y$. 因此 E 是度量空间, 并且与任何度量空间一样, E 有拓扑结构. 对于这种拓扑, 范数 $u \mapsto \|u\|$ 是连续映射 $E \to \mathbb{R}$, 因为 $|\|u\|-\|v\|| \leqslant \|u-v\|$.

对于 $a \in E$ 及 $r>0, B'(a,r)$ 是心为 a, 半径为 r 的球, 它是由满足下列条件的 $x(\in E)$ 形成的:

$$d(x,a) \leqslant r, \quad 即 \quad \|x-a\| \leqslant r.$$

考虑一个子集 $U \subset E$; 如果对任何 $a \in U$, 存在着 $r>0$, 使得球 $B'(a,r)$ 包含在 U 中, 那么 U 就叫做开集. 这些开集正好确定一种拓扑.

可以验证球 $B'(a,r)$ 是闭集 (它的余集是开集). 相反地, 由满足 $\|x-a\|<r$ 的 x 所形成的 "开球" $B(a,r)$ 是开集.

E 的拓扑是分离的, 因为如果 $x \neq y$, 令 $d(x,y)=r$, 那么开球 $B(x,r/2)$ 与 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{r}/2)$ 不相交.

考虑 E 中点列 $(x_n)_{n\geqslant 0}$. 如果 $a \in E$, 并且距离序列 $\|x_n-a\|$ 趋近于零, 就说序列 $(x_n)_{n\geqslant 0}$ 有极限 a, 并且记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 容易证明: 如果

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b, \text{那么} \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = a+b.$$

同样, 如果

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \mu,$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_n x_n) = \mu a.$$

序列 (x_n) 称为柯西序列, 如果我们有 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \|x_m-x_n\|=0$; 这表示 $\forall\varepsilon>0, \exists N$ 使得

$$(m \geqslant N \text{ 及 } n \geqslant N) \Rightarrow \|x_m-x_n\| \leqslant \varepsilon.$$

我们知道任何收敛序列 (即有极限的序列) 是柯西序列. 如果逆命题成立 (即任何柯西序列是收敛的), 就说度量空间 E 是完备的.

定义. 如果一个赋范向量空间对于由范数导出的距离是完备的, 它就称为一个巴拿赫空间. 如果基础域是 $\mathbb{R}$, 它就称为实巴拿赫空间; 如果是 $\mathbb{C}$, 它就称为复巴拿赫空间.

1.2. 巴拿赫空间的例子

例 1. 考虑实数值空间 $\mathbb{R}^n$ 或复数值空间 $\mathbb{C}^n$. 这是实向量空间或复 e.v.. 考虑在这空间上下列三个常用范数中的一个:

$$\rho_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$
$$\rho_2(x) = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|,$$
$$\rho_3(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad (\text{欧几里得范数});$$

[把向量 x 的坐标记作 $x_1, \cdots, x_n$].

由上列三种范数之一在 $\mathbb{R}^n$ (或 $\mathbb{C}^n$) 上所确定的拓扑是乘积拓扑 $\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ (n 个 $\mathbb{R}$) 或 $\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}$ (n 个 $\mathbb{C}$). 要使一个点列有极限 $a = (a_1, \cdots, a_n)$, 必须而且只须对于满足 $1 \leqslant i \leqslant n$ 的任何整数 i, 序列中各点的第 i 个坐标有极限 a_i. 由于 $\mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$) 是完备的, $\mathbb{R}^n$ (或 $\mathbb{C}^n$) 也是完备的; 对于 ρ_1, ρ_2, ρ_3 中任一范数, $\mathbb{R}^n$ (或 $\mathbb{C}^n$) 是巴拿赫空间.

例 2. 设 X 是拓扑空间. 设 $\mathscr{C}_b(X)$ 是所有连续有界数值函数 $X \to \mathbb{R}$ 的集. 所谓 f 有界, 就是说

$$\sup_{x\in X} |f(x)| \text{ 是有限数}.$$

显然 $\mathscr{C}_b(X)$ 是向量空间 (加法是函数的加法, f 与纯量 λ 的乘积 λf 是函数 f 与常数 λ 的乘积). 令

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

可以证明 (作为习题!): $\|f\|$ 是向量空间 $\mathscr{C}_b(X)$ 的范数. 称它为函数的一致收敛范数. 其次, 这空间是完备的 (作为习题详细证明: 这是由于对于有界连续函数的一致收敛序列, 它的极限是连续的). 因此 $\mathscr{C}_b(X)$ 是 (实) 巴拿赫空间.

同样, 用复值有界连续函数也可构成复巴拿赫空间.

例 2′. 现推广例 2. 不考虑有界连续函数 $x \to \mathbb{R}$, 而考虑有界连续映射 $X \to F$, 这里 F 表示一个给定的巴拿赫空间; 由定义, 对于 $f : X \to F$, 如果

$$\|f\| = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$$

是有限数, f 称为有界的. (在上式右边, $\|f(x)\|$ 表示 $f(x)$ 在巴拿赫空间 F 中的范数.) 这些映射的集 $\mathscr{C}_b(X; F)$ 也是向量空间 (如果 F 是实 e.v., 这集是 $\mathbb{R}$ 上的 e.v.; 如果 F 是复 e.v., 这集是 $\mathbb{C}$ 上的 e.v.). 其次, 上面确定的 $\|f\|$ 是这一向量空间的范数; 因为 F 是完备的, 所以这空间是完备的 (作为习题来证明). 因此 $\mathscr{C}_b(X; F)$ 是巴拿赫空间.

例 3. 设 $\mathscr{L}_1([0,1])$ 是在区间 $[0,1](\subset \mathbb{R})$ 上按勒贝格意义可积的数值函数所构成的巴拿赫空间. 令

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt;$$

除了 (i′) 外, 它有范数的所有其他性质: 由关系式 $\|f\|=0$ 不能导出 f 恒等于零, 只能导出 f "几乎处处" 是零 (这就是说, 除了在一个测度是零的集上以外, f 是零). 为了得到真正的范数, 进行如下: 考虑等价关系 $\mathscr{R}(f_1, f_2)$:

"f_1 及 f_2 几乎处处相等"

等价类的集 $L_1([0,1])$ 有向量空间结构 (考虑 $\mathscr{L}_1[0,1]$ 中满足 $\|f\|=0$ 的 f 所构成的子空间; $L_1([0,1])$ 是这一子空间的商空间). 如果 φ 是一个等价类, 定义 $\|\varphi\|$ 为 φ 类中所有函数 f 的公有值 $\|f\|$. 于是 $\|\varphi\|$ 是向量空间 $L_1([0,1])$ 中的一个范数. 其次, 由勒贝格积分论, $L_1([0,1])$ 是完备的 (如果我们用黎曼积分, 情况就不是这样). 因此 $L_1([0,1])$ 是巴拿赫空间.

例 3′. 与例 3 类似, 现考虑 "平方可积函数" 构成的向量空间 $\mathscr{L}_2([0,1])$, 这时

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}.$$

和上面一样, 由等价关系 $\mathscr{R}(f_1, f_2)$ 作出商空间. 商空间 $L_2([0,1])$ 是巴拿赫空间.

1.3. 巴拿赫空间中的正规收敛级数

定义. 设 $(u_n)_{n\geqslant 0}$ 是 E 中元素 u_n 的序列, 这里 E 表示一向量空间. 如果范数的级数

$$\sum_{n\geqslant 0} \|u_n\|$$

即一个各项 $\geqslant 0$ 的级数收敛, 那么通项是 u_n 的级数称为正规收敛.

定理. *如果通项是 u_n 的级数正规收敛, 那么这级数收敛* (这就是说: $\sum\limits_{0\leqslant n\leqslant p} u_n$ 当 $p\to\infty$ 时有极限, 并把这极限记作 $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$), 并且我们有

$$\|\sum_{n\geqslant 0} u_n\| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \|u_n\|.$$

现不证明这定理 (可作为习题证明 —— 译者注.) (肖盖把 "正规收敛" 称为 "绝对可和"). 主要的是已假定 E 是巴拿赫空间, 而在证明中要用柯西收敛判别准则.

例. 再考虑巴拿赫空间 $\mathscr{C}_B(X)$ (1.2 段中例 2). 用 u_n 表示拓扑空间 X 中的有界连续数值函数; 所谓 u_n 是一个正规收敛级数的通项, 就是说存在着通项是 $\varepsilon_n \geqslant 0$

的一个收敛级数, 使得对于任何 n,

$$\text{对任何 } x \in X, \quad |u_n(x)| \leqslant \varepsilon_n;$$

事实上只须取 $\varepsilon_n = \|u_n\| = \sup\limits_{x \in X} |u_n(x)|$. 这样又得到了函数项级数正规收敛的常用概念.

1.4. 连续线性映射

设 E 及 F 是两个赋范 e.v. (或者两个在域 $\mathbb{R}$ 上, 或者两个在域 $\mathbb{C}$ 上). 我们要找出一个判别准则, 用来识别: 当 E 及 F 具有它们的范数所确定的拓扑时, 一个线性映射 $f: E \to F$ 是否是连续的.

定理 1.4.1. 对于一个线性映射 $f: E \to F$, 下列条件是等价的:
(a) f 在 E 中任何点连续;
(b) f 在原点 O 连续;
(c) $\|f\|$ 在单位球 $\|x\| \leqslant 1$ 上有界.

证. 显然 (a)⇒(b). 现证明 (b)⇒(c): 假定 f 在点 O 连续. F 的单位球的逆像 f^{-1} 是 E 中 O 的一个邻域; 从而对于适当的 $r > 0$, 这邻域包含球 $\|x\| \leqslant r$. 于是存在着 $r > 0$, 使得

$$\text{由 } \|x\| \leqslant r \quad \text{可导出} \quad \|f(x)\| \leqslant 1;$$

于是

$$\text{由 } \|x\| \leqslant 1 \quad \text{可导出} \quad \|f(x)\| \leqslant 1/r;$$

这是因为如果令 $y = rx$, 就有

$$\|f(y)\| \leqslant 1; \quad \text{或} \quad \|f(y)\| = r\|f(x)\|.$$

因此证明了 $\|f(x)\|$ 在单位球 $\|x\| \leqslant 1$ 上有界; 这样就证明了 (b)⇒(c).

最后证明 (c)⇒(a). 如果 (c) 成立, 那么存在着 $M > 0$, 使得对于满足 $\|x\| \leqslant 1$ 的任何 x, $\|f(x)\| \leqslant M$; 由此可得, 对于无例外的任何 x,

$$\|f(x)\| \leqslant M\|x\|.$$

(事实上, 如果 $\|x\| = 0$, 上式是显然的; 如果 $\|x\| = r > 0$, 向量 $y = (1/r)x$ 满足 $\|y\| = 1$, 从而 $\|f(y)\| \leqslant M$, 而且 $\|f(x)\| = r\|f(y)\| \leqslant rM = M\|x\|$). 现证明: 在这些条件下, 在任何点 $a \in E, f$ 连续: 既然 f 是线性的, 我们有 $f(x) - f(a) = f(x - a)$, 因此只须 $\|x - a\| \leqslant \varepsilon/M$, 就有

$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

f 的连续性得证.

记号. 用 $\mathscr{L}(E;F)$ 表示从 E 到 F 中所有连续线性映射的集. 它显然是一个向量空间 (所有线性映射 $E \to F$ 所构成空间的子向量空间). 在 $\mathscr{L}(E;F)$ 上, 令

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\|,$$

它是有限数 (根据定理 1.4.1 中的判别准则 (c)). 我们已看到, 对于任何 $x \in E$:

$$\boxed{\|f(x)\| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|} \quad (\text{基本关系式}) \tag{1.4.1}$$

其次, 设 $M > 0$ 满足

$$\|f(x)\| \leqslant M\|x\| \quad \text{对于任何 } x \in E; \tag{1.4.2}$$

于是对于 $\|x\| \leqslant 1$, 由此得 $\|f(x)\| \leqslant M$; 从而

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x)\| \leqslant M,$$

这就是说, $\|f\| \leqslant M$. 因此 $\|f\|$ 是使关系式 (1.4.2) 成立的最小数 $M \geqslant 0$

$\|f\|$ 是在向量空间 $\mathscr{L}(E;F)$ 上的一个范数: 证明容易得出 (作为习题来证明). 因此 $\mathscr{L}(E;F)$ 是赋范向量空间; 于是给出两个赋范空间 E 及 F 就完全确定了一个拓扑.

定理 1.4.2. 如果 F 是巴拿赫空间, 那么 $\mathscr{L}(E;F)$ 是巴拿赫空间.

证. 设 (f_n) 是在空间 $\mathscr{L}(E;F)$ 中的一个柯西序列. 对于每个 $r > 0$, 考虑 f_n 在球 $\|x\| \leqslant r$ 中的限制; 这是一些映射 $f_n^{(r)}$, 它们形成向量空间 $\mathscr{C}_b(B'(0,r);F)$ (参看 1.2 段中例 2′) 中的一个柯西序列. 由于 F 是巴拿赫空间, 空间 $\mathscr{C}_b(B'(0,r);F)$ 是完备的. 因此在球 $\|x\| \leqslant r$ 上, 序列 $f_n^{(r)}$ 一致收敛于一个有界连续映射 $f^{(r)}$. 显然, 对于 $r' < r$, $f^{(r)}$ 在球 $\|x\| \leqslant r'$ 中的限制等于 $f^{(r')}$. 因此映射 $f^{(r)}$ 的全体 (互为开拓的映射) 在整个空间 E 中确定一个映射 f, 使得 f 在球 $\|x\| \leqslant r$ 中的限制恰好是 $f^{(r)}$. 对于每个 $x \in E$, 我们有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x);$$

这是由于在每个心为 O 的球上, 收敛性是一致的. 由此可导出: 如果 $x \in E, y \in E$, 那么

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} (f_n(x) + f_n(y)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} f_n(y) \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

同样证明

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

因此 f 是线性的. 已知在每个球 $\|x\| \leqslant r$ 上, $\|f(x)\|$ 是有界的; 从而 f 是连续线性的.

最后, $\|f - f_n\|$ 趋近于 0. 这是因为

$$\|f - f_n\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|f(x) - f_n(x)\|,$$

并且在球 $\|x\| \leqslant 1$ 上, 序列 f_n 一致收敛于 f. 于是证明了柯西序列 (f_n) 有极限 f, 因而证明了 $\mathscr{L}(E;F)$ 是巴拿赫空间.

1.5. 连续线性映射的复合

设 E, F, G 是三个赋范 e.v., 并且设 $f: E \to F, g: F \to G$ 是两个连续线性映射. 那么 $g \circ f: E \to G$ 是连续线性映射 (事实上, 我们知道, 两个线性映射的复合映射是线性的, 两个连续映射的复合映射是连续的). 对于任何 $x \in E$, 我们有

$$\|(g \circ f)(x)\| = \|g(f(x))\| \leqslant \|g\| \cdot \|f(x)\|,$$

然而

$$\|f(x)\| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|,$$

由此最后得到

$$\|(g \circ f)(x)\| \leqslant \|g\| \cdot \|f\| \cdot \|x\|.$$

根据线性映射的范数的特征性质 (参看 1.4 段), 由此得

$$\boxed{\|g \circ f\| \leqslant \|g\| \cdot \|f\|}. \tag{1.5.1}$$

1.6. 赋范向量空间的同构; 赋范向量空间上的等价范数

定义. 在下列条件下, 映射 $f: E \to F$ (这里 E 及 F 是赋范 e.v.) 是一同构:

1° f 是连续线性的;

2° 存在着一个连续线性映射 $g: F \to E$ 使得 $g \circ f = \mathrm{id}_E$ (E 的恒等映射), 并且 $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

这些条件表明: f 是从 E 到 F 上的双射, g 是逆双射. 另一方面, 显然, 如果 f 是线性双射, 逆双射也是线性的. 反之, 如果 f 是连续线性双射, 却不能断定逆双射也是连续的. 由此出发, 可得同构的另一特性:

要 $f: E \to F$ 是一同构, 必须而且只须 f 是 (拓扑空间的) 同胚, 并且是线性的.

现叙述在分析中很重要、但难于证明的一个定理; 证明从略[①]:

[①] 例如可参看 N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, Chap. II (N. 布尔巴基, 拓扑向量空间, 第二章).

巴拿赫定理. 如果 E 和 F 是巴拿赫空间, 任何连续线性双射 $f: E \to F$ 是同构.

(这定理表明: 逆映射 $f^{-1}: F \to E$ 自动地是连续的.)

一定不要混淆同构和等距:

定义. 设 E 和 F 是赋范 e.v. 如果线性双射 $f: E \to F$ 保持范数不变, 这就是说,

$$\text{对于 } x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|,$$

那么 f 就是一个等距.

由上列定义中的条件可导出: $\|f(x)\|$ 在单位球上有界; 因此 f 是连续线性映射. 于是任何等距是一同构; 但是逆命题不成立: 例如位似映射 $x \mapsto \lambda x$ (其中 $\lambda \neq 0$) 是一同构 $E \to E$; 但是如果 $|\lambda| \neq 1$, 它就不是等距.

定义. 设 ρ_1 及 ρ_2 是同一向量空间 E 上的两个范数. 如果它们确定同一拓扑, 就说它们是等价的.

这一定义也可表述如下: 设 E_{ρ_1} 是 E 带范数 ρ_1 而得的赋范 e.v., E_{ρ_2} 是 E 带范数 ρ_2 而得的赋范 e.v. E 的恒等映射确定两个互为逆映射的双射

$$f_1: E_{\rho_1} \to E_{\rho_2}, \quad f_2: E_{\rho_2} \to E_{\rho_1}.$$

所谓 ρ_1 及 ρ_2 确定同一拓扑, 就是说 f_1 及 f_2 是赋范 e.v. 的同构. 为此, 必须而且只须 f_1 及 f_2 是连续映射.

现应用线性映射的连续性判别准则 (定理 1.4.1): f_1 的连续性可表述为: 存在着一个 $M > 0$, 使得

$$\text{对任何 } x \in E, \quad \rho_2(x) \leqslant M\rho_1(x);$$

同样, f_2 的连续性可用存在着一个 $M' > 0$, 使得

$$\rho_1(x) \leqslant M'\rho_2(x)$$

来表述. 由此得:

命题 1.6.1. 要使范数 ρ_1 及 ρ_2 等价, 必须而且只须 (对于 $x \neq 0$ 确定的) 比值 $\rho_2(x)/\rho_1(x)$ 有 > 0 的实数为上界及下界.

定理 1.6.2. 在向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上, 所有的范数是等价的.

证. 记欧几里得范数为

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2}$$

($\xi_1, \cdots, \xi_n$ 表示 x 的坐标). 设 ρ 是另外任一范数; 先证明: (当 $\mathbb{R}^n$ 具有也由欧几里得范数所确定的乘积拓扑时,) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ 是连续的. 用 $(e_1, \cdots, e_n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 的典范基, 我们有

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant \rho(x-y) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i| \rho(e_i).$$

这一不等式表明: 当 y 趋近于 x 时, $\rho(y)$ 趋近于 $\rho(x)$; ρ 正好是连续的.

在本身是紧集的单位球面 $\|x\| = 1$ 上, ρ 是处处连续且 $\neq 0$ 的函数; 因此在单位球面上, ρ 有一上界 $M > 0$ 及一下界 $m > 0$. 由此立即得到

$$\rho(x) \leqslant M\|x\|, \quad \rho(x) \geqslant m\|x\|,$$

这样就可证明 ρ 与欧几里得范数等价.

系. 如果 E 是有限维赋范 e.v., 那么任何线性双射 $f : \mathbb{R}^n \to E$ 是一同构. (事实上, 如果 ρ 表示 E 上的范数, $\rho \circ f$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的范数; 因此这范数与欧几里得范数确定的拓扑相同, 由此得上述结果.)

定理 1.6.3. 设 E 是有限维赋范 e.v. 那么 E 是巴拿赫空间, 并且从 E 到一个赋范 e.v. F 的任何线性映射是连续的.

证. 设 E 的维数是 n; 我们有一线性双射 $f : \mathbb{R}^n \to E$. 由上列系, f 是一同构. 由于 $\mathbb{R}^n$ 是完备的, E 也是完备的 (E 是一巴拿赫空间). 设 $g : E \to F$ 是一线性映射 (F 是一赋范 e.v.); 如果证明了

$$h = g \circ f : \mathbb{R}^n \to F$$

是连续的, 就可推出 $g = h \circ f^{-1}$ 是连续的.

因此只须证明: 任何线性映射 $h : \mathbb{R}^n \to F$ 是连续的. 我们有

$$h(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i h(e_i).$$

由此得

$$\|h(\xi_1, \cdots, \xi_n)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \cdot \|h(e_i)\|,$$

从而当点 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 趋近于 0 时, $h(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 趋近于 0.

注意. 对于复向量空间, 也有与定理 1.6.2 及 1.6.3 相类似的结果: 这时 $\mathbb{R}^n$ 的地位由 $\mathbb{C}^n$ 所代替.

设 E 及 F 是两个有限维向量空间, $\dim E = m, \dim F = n$; 这里 $\dim E$ 及 $\dim F$ 表示 E 及 F 的维数. 选取 E 的基及 F 的基, 等同于使向量空间 $\mathscr{L}(E; F)$ 与 n 行、m 列的矩阵所构成的向量空间相应 (这些矩阵的元素在基础域中). $\mathscr{L}(E; F)$ 的维数等于乘积 mn.

1.7. 空间 $\mathscr{L}(E;F)$ 的例子

例 1. 在实 e.v. 或复 e.v. 情形, 分别设 $E=\mathbb{R}$ 或 $E=\mathbb{C}$. 例如以下就实的情形讨论. 定义一个自然等距

$$\mathscr{L}(\mathbb{R};F)\approx F$$

为此, 对于每个 $y\in F$, 作从 $\mathbb{R}$ 到 F 的映射 $\lambda\mapsto\lambda y$; 由于

$$\|\lambda y\|=\|y\|\cdot|\lambda|,$$

上列映射是连续的. 这样确定了一个映射 $\varphi:F\to\mathscr{L}(\mathbb{R};F)$; 它显然是线性的. 其次, 范数的关系式表明: 线性映射 $\varphi(y):\mathbb{R}\to F$ 有范数 $\|y\|$. 反之, 从连续线性映射 $f:\mathbb{R}\to F$ 出发, 把它与元素 $f(1)\in F$ 相连系; 这样可确定从 $\mathscr{L}(\mathbb{R};F)$ 到 F 的一个映射 ψ, 它显然是线性的. 可立即看出 φ 与 ψ 是互逆映射; 从而两者中每一个都是双射. 而且因为 $\|\varphi(y)\|=\|y\|$, 这种双射是等距. 按照定义, ψ 是从 $\mathscr{L}(\mathbb{R};F)$ 到 F 上的自然等距.

例 2. 设 E 是实巴拿赫空间; 那么 $\mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ 是实巴拿赫空间, 称它为 E 的*拓扑对偶*. 它的元素是 E 上的*连续线性形式*.

不要把拓扑对偶与代数对偶相混淆, 后者包含任何连续或不连续的线性形式. 当 E 的维数是 n 时, 拓扑对偶与代数对偶相混, 前者的维数也是 n. 一般地, 把 E 的拓扑对偶记作 E^*; E^* 具有它的巴拿赫空间的结构.

同样定义复巴拿赫空间上的拓扑对偶 $\mathscr{L}(E;\mathbb{C})$.

例 3. 代数 $\mathscr{L}(E;E)$, 这里 E 是巴拿赫空间.

已知 $\mathscr{L}(E;E)$ 是巴拿赫空间. 但我们还有合成律

$$(g,f)\mapsto g\circ f.$$

把这种合成称为*乘法* (这种乘法一般不是交换的). 这种乘法有下列性质:

$$\begin{cases}(g_1+g_2)\circ f=(g_1\circ f)+(g_2\circ f),\\ (\lambda g)\circ f=\lambda(g\circ f)\end{cases}\tag{1.7.1}$$

(可从线性映射加法 g_1+g_2 的定义以及线性映射 g 乘以纯量 λ 导出). 其次, 因为 g 是线性的, 所以

$$\begin{cases}g\circ(f_1+f_2)=(g\circ f_1)+(g\circ f_2),\\ g\circ(\lambda f)=\lambda(g\circ f).\end{cases}\tag{1.7.2}$$

关系式 (1.7.1) 及 (1.7.2) 表明: 如果固定 f, 映射 $g\mapsto g\circ f$ 是线性的; 如果固定 g, 映射 $f\mapsto g\circ f$ 是线性的. 这样的映射称为*双线性的* (参看下面 1.8 段).

每当在向量空间 A 中, 确定了一个双线性的内合成律 (称为乘法), 就说在 A 中基础域上确定了一个代数结构. 如果乘法是结合的, 就说这种代数是结合的. 因此可看出, 按照 E 是实或复向量空间, $\mathscr{L}(E;E)$ 是在域 $\mathbb{R}$ 或域 $\mathbb{C}$ 上的结合代数. 我们往往省去乘号 $\circ$, 简单地写出 gf 来代替合成运算 $g \circ f$.

在代数 $\mathscr{L}(E;E)$ 上, 我们有一范数, 它满足向量空间中范数所常满足的条件 (参看 1.1 段), 而且由 (1.5.1), 它还满足

$$\|gf\| \leqslant \|g\| \cdot \|f\| \tag{1.7.3}$$

(范数对乘法的性质).

最后, 如果 E 是巴拿赫空间 (直到本段末都假设如此), $\mathscr{L}(E;E)$ 对于范数是完备的 (根据定理 1.4.2). 于是我们说 $\mathscr{L}(E;E)$ 是一个巴拿赫代数 A: 准确地说, 巴拿赫代数 A 是带有满足 (1.7.3) 的范数、并且对这范数完备的一种代数.

注意. 不要以为必然有 $\|gf\| = \|g\| \cdot \|f\|$; *例如*: 取 $E = \mathbb{R}^2$; 设 f (或 g) 是在第一个 (或第二个) 坐标轴上的投影映射. 我们有

$$gf = fg = 0,$$

然而

$$\|f\| = 1, \quad \|g\| = 1.$$

下面要在巴拿赫代数中, 两次应用正规收敛级数的理论.

定理 1.7.1 及定义. *如果 E 是巴拿赫空间, 并且如果 $f \in \mathscr{L}(E;E)$, 那么级数*

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} f^n$$

正规收敛. 把级数的和记作 $\exp f$.

证. 首先约定 $f^0 = 1$, 即有关代数的单位元素 (恒等映射 $E \to E$). 由 (1.7.3), 我们有

$$\|f^n\| \leqslant \|f\|^n,$$

因此收敛级数

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \|f\|^n = \exp \|f\|$$

(和函数是通常的单实变指数函数) 是已给范数级数的强级数, 于是已给范数级数正规收敛.

习题. 证明: 如果 $gf = fg$, 我们有 $(\exp f) \cdot (\exp g) = (\exp g) \cdot (\exp f) = \exp(f + g)$; 并且由于 $\exp(0) = 1$, 特别有

$$(\exp f) \cdot (\exp(-f)) = 1,$$

从而 $\exp f$ 是 $\mathscr{L}(E;E)$ 中可逆的元素.

注意. 以上所述对任何巴拿赫代数都适用.

定理 1.7.2. 设 E 是巴拿赫空间, 并设 $u \in \mathscr{L}(E;E)$ 满足

$$\|u\| < 1.$$

那么 $1-u$ 在代数 $\mathscr{L}(E;E)$ 中有逆元素.

证. 级数

$$\sum_{n\geqslant 0} u^n = 1 + u + \cdots + u^n + \cdots$$

正规收敛, 这是因为 $\|u^n\| \leqslant \|u\|^n$, 并且由假设 $\|u\| < 1$, 几何级数 $\sum_{n\geqslant 0} \|u\|^n$ 收敛. 设 v 是 $\sum_{n\geqslant 0} u^n$ 的和. 立即可看出

$$vu = uv$$

是级数 $\sum_{n\geqslant 1} u^n$ 的和. 于是

$$v(1-u) = (1-u)v = 1.$$

因此 v 是 $1-u$ 的逆元素.

注意. 这定理在任何巴拿赫代数中都适用.

下列定理是从定理 1.7.2 导出的:

定理 1.7.3. 设 E 及 F 是两个巴拿赫空间. 把 $\mathscr{L}(E;F)$ 中由同构 $E \to F$ (参看 1.6 段中定义) 所组成的子集记作 $\mathrm{Isom}(E;F)$. 那么

(a) $\mathrm{Isom}(E;F)$ 是 $\mathscr{L}(E;F)$ 中的开集;

(b) 从 $\mathrm{Isom}(E;F)$ 到 $\mathscr{L}(F;E)$ 的映射 $u \mapsto u^{-1}$ 是连续的.

证. 首先注意集 $\mathrm{Isom}(E;F)$ 可能是空的 (如果 E 及 F 不是同构!). 在这种情形下, 定理是正确的, 不过是平凡的. 如果 $\mathrm{Isom}(E;F)$ 不是空的, 取一个 $u_0 \in \mathrm{Isom}(E;F)$. 为了证明 (a), 必须证明: 任何充分接近 u_0 的 u 还是一个同构. 然而要使 $u: E \to F$ 是同构, 必须而且只须

$$(u_0)^{-1}u : E \to E$$

是同构; 因此要求得 $(u_0)^{-1}u$ 是同构, 即是 $\mathscr{L}(E;E)$ 中一个可逆元素的充分条件. 令:

$$(u_0)^{-1}u = 1 - v.$$

由定理 1.7.2, 只须有 $\|v\| < 1$. 然而 $v = 1 - u_0^{-1}u = u_0^{-1}(u_0 - u)$, 从而

$$\|v\| \leqslant \|u_0^{-1}\|\|u - u_0\|. \tag{1.7.4}$$

因此, 如果

$$\|u-u_0\| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|},$$

就可断定 $\|v\| < 1$, 从而 u 是同构. 这正好证明了与 u_0 充分接近的 u 是同构. (注意! 不要以为 $\|u_0^{-1}\| = 1/\|u_0\|$).

还要证明 (b). 我们有

$$u^{-1} = (u_0(1-v))^{-1} = (1-v)^{-1}(u_0)^{-1},$$

从而

$$u^{-1} - (u_0)^{-1} = [(1-v)^{-1} - 1](u_0)^{-1}; \tag{1.7.5}$$

然而

$$(1-v)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} v^n, \quad \text{从而} \quad (1-v)^{-1} - 1 = \sum_{n\geqslant 1} v^n,$$

$$\|(1-v)^{-1} - 1\| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \|v\|^n = \frac{\|v\|}{1-\|v\|}.$$

于是由 (1.7.5) 导出

$$\|u^{-1} - (u_0)^{-1}\| \leqslant \|u_0^{-1}\| \cdot \frac{\|v\|}{1-\|v\|}. \tag{1.7.6}$$

当 u 趋近于 u_0 时, 由 (1.7.4), $\|v\|$ 趋近于 0, 因而由 (1.7.6), u^{-1} 趋近于 $(u_0)^{-1}$. 这正好证明了对于 $\mathrm{Isom}(E;F)$ 中的任何 u, u^{-1} 是 u 的连续函数. 定理得证.

注意. 当 E 及 F 有相同的有限维数 n, 并且把 $\mathscr{L}(E;F)$ 与 n 行、n 列矩阵的空间等同起来时, 我们知道怎样表明矩阵 f 是可逆的: 条件是 f 的行列式 $\det f \neq 0$. 由于从 $\mathscr{L}(E;F)$ 到 $\mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$) 的映射 $f \mapsto \det f$ 是连续的, O 的余集的逆象、即 $\mathrm{Isom}(E;F)$ 是开集. 这样, 在特殊情况下, 定理中结论 (a) 得到了一个新的证明. 在这种特殊情况下, 结论 (b) 可由计算逆矩阵来证明.

1.8. 连续多重线性映射

首先, 回顾一下代数: 设 $E_1, \cdots, E_n$ 及 F 是向量空间; 设有映射

$$f: E_1 \times \cdots \times E_n \to F;$$

如果对每个整数 $k \in [1,n]$, 并且对每组元素 $a_i \in E_i (i \neq k)$, 从 E_k 到 F 的 "偏" 映射是线性的, 那么就说映射 f 是*多重线性的* (如果 $n=2, f$ 是双线性的; 如果 $n=3, f$ 是三线性的). 换句话说, 当我们除去一个变量以外固定所有变量时, f 必须线性依赖于未固定的变量. 这样, 只要至少有一个 x_i 是零, 就有 $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$; 特别, f 在原点 $(0, \cdots, 0)$ 是零. 注意: 如果 f 是多重线性的, 我们有

$$f(\lambda_1 x_1, \cdots, \lambda_n x_n) = (\lambda_1 \cdots \lambda_n) f(x_1, \cdots, x_n). \tag{1.8.1}$$

例. 取纯量域作为 $E_1, \cdots, E_n$ 及 F, 把域中 n 个元素的乘积

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

看作 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的映射, 那么这乘积就是一个 n 重线性映射.

现设 $E_1, \cdots, E_n, F$ 是赋范向量空间, 那么 $E_1 \times \cdots \times E_n$ (作为拓扑空间的乘积) 有一种拓扑结构; 因此询问映射 $f: E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ 是否连续是有意义的. 现推广定理 1.4.1 如下:

定理 1.8.1. 设 $E_1, \cdots, E_n, F$ 是赋范 e.v., 并且设 $f: E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ 是一多重线性映射. 那么下列条件是等价的:

(a) f 在 $E_1 \times \cdots \times E_n$ 中任何点连续;

(b) f 在原点 $(0, \cdots, 0) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ 连续;

(c) $\|f(x_1, \cdots, x_n)\|$ 在 n 个单位球

$$\|x_1\| \leqslant 1, \cdots, \|x_n\| \leqslant 1$$

的乘积上有界.

证明像定理 1.4.1 的证明那样进行. 显然 (a)⇒(b). 为了证明 (b)⇒(c), 注意: 如果 f 在原点连续, f 的单位球的逆像是 $(0, \cdots, 0)$ 在 $E_1 \times \cdots \times E_n$ 中的一个邻域, 因此存在着 $r > 0$, 使得

$$(\text{对任何 } i, \|x_i\| \leqslant r) \Rightarrow \|f(x_1, \cdots, x_n)\| \leqslant 1.$$

考虑到 (1.8.1), 由此导出

$$(\text{ 对任何 } i, \|x_i\| \leqslant 1) \Rightarrow \|f(x_1, \cdots, x_n)\| \leqslant \frac{1}{r^n}.$$

这样就证明了 (c).

设 f 满足 (c); 设有 $M > 0$, 使得

$$(\text{对任何 } i, \|x_i\| \leqslant 1) \Rightarrow \|f(x_1, \cdots, x_n)\| \leqslant M.$$

于是我们有: 无论 x_i 是怎样,

$$\|f(x_1, \cdots, x_n)\| \leqslant M \|x_1\| \cdots \|x_n\|. \tag{1.8.2}$$

证明在这些条件下, f 在任一点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 连续; 这样就证明了 (c)⇒(a). 作差式

$$\begin{aligned}
&f(x_1, \cdots, x_n) - f(a_1, \cdots, a_n) \\
= &f(x_1 - a_1, x_2, \cdots, x_n) + f(a_1, x_2 - a_2, x_3, \cdots, x_n) \\
&+ \cdots + f(a_n, \cdots, a_{n-1}, x_n - a_n).
\end{aligned}$$

[上式容易验证, 因为 f 对每个变量分别是可加映射[①].] 上式左边的范数不超过右边各项的范数之和; 因此, 考虑到 (1.8.2):

$$\begin{aligned}&\|f(x_1,\cdots,x_n)-f(a_1,\cdots,a_n)\|\\ \leqslant\ &M\|x_1-a_1\|\cdot\|x_2\|\cdots\|x_n\|+M\|x_2-a_2\|\cdot\|a_1\|\cdot\|x_3\|\cdots\|x_n\|\\ &+\cdots+M\|x_n-a_n\|\cdot\|a_1\|\cdots\|a_{n-1}\|\end{aligned}\tag{1.8.3}$$

假定对于任何 $i, \|x_i-a_i\|\leqslant\varepsilon$; 那么 $\|x_i\|\leqslant\|a_i\|+\varepsilon$, 因此存在着一数 $A>0$, 使得

$$(\text{对任何 } i, \|x_i-a_i\|\leqslant\varepsilon)\Rightarrow \text{对任何 } i, \|x_i\|\leqslant A.$$

于是只要对任何 $i, \|x_i-a_i\|\leqslant\varepsilon$, 由不等式 (1.8.3) 可导出

$$\|f(x_1,\cdots,x_n)-f(a_1,\cdots,a_n)\|\leqslant MA^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i-a_i\|\right)\leqslant nMA^{n-1}\varepsilon. \tag{1.8.4}$$

显然, 只要 $\varepsilon>0$ 充分小, 可选取 A 使其与 ε 无关. 于是 (1.8.4) 表明: 当同时有 x_1 趋近于 $a_1,\cdots,x_n$ 趋近于 a_n 时, $f(x_1,\cdots,x_n)$ 趋近于 $f(a_1,\cdots,a_n)$. 因此 f 在点 $(a_1,\cdots,a_n)$ 连续, 定理证完.

记号. 把连续 n 线性映射 $E_1\times\cdots\times E_n\to F$ 的集记作 $\mathscr{L}(E_1,\cdots,E_n;F)$. 这显然是所有映射 $E_1\times\cdots\times E_n\to F$ 的向量空间的子向量空间. 对于 $f\in\mathscr{L}(E_1\times\cdots\times E_n;F)$, 令

$$\|f\|=\sup\|f(x_1,\cdots,x_n)\|;$$

当 $x_1,\cdots,x_n$ 在各单位球中取值时,

$$\|x_1\|\leqslant 1,\cdots,\|x_n\|\leqslant 1.$$

于是由 (1.8.2),

$$\|f(x_1,\cdots,x_n)\|\leqslant\|f\|\cdot\|x_1\|\cdots\|x_n\|,$$

并且 $\|f\|$ 是使 (1.8.2) 成立的 $M>0$ 中最小的.

习题. 证明 $\|f\|$ 正好是向量空间 $\mathscr{L}(E_1,\cdots,E_2;F)$ 上的一个范数.

另一习题. 证明如果 F 是巴拿赫空间, 那么赋范 e.v. $\mathscr{L}(E_1,\cdots,E_n;F)$ 是巴拿赫空间. (证明步骤与 $n=1$ 情形相同, 参看上面 1.4 段.)

[①] 译者注: 此处原文是 "fonction", 现译作 "映射". "fonction" 即英文 "function" 的原意, 没有必然涉及 "数". 我国古人在数学中将此字意译为 "函数". 本书法文原本中, 往往把法文 "application: $E\to F$," 即英文 "mapping: $E\to F$", 称为 "fonction: $E\to F$"; 当 $F\subset\mathbb{R}$ 或 $\subset\mathbb{C}$ 中时, 可译为 "函数: $E\to F$", 否则似宜译为 "映射 $E\to F$".

连续双线性映射的例子. 设 E, F, G 是三个赋范向量空间. 考虑复合映射

$$\varphi : \mathscr{L}(F;G) \times \mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E;G);$$

它是由

$$\varphi(g, f) = g \circ f$$

确定的. 已可看出它是双线性的. 我们还知道 (参看 (1.5.1))

$$\|g \circ f\| \leqslant \|g\| \cdot \|f\|;$$

因此如果 $\|f\| \leqslant 1$ 并且 $\|g\| \leqslant 1$, 就有 $\|g \circ f\| \leqslant 1$. 这样就证明了双线性映射 φ 是连续的, 并且它的范数 $\|\varphi\| \leqslant 1$.

1.9. 自然等距映射 $\mathscr{L}(E, F; G) \approx \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G))$

首先定义映射

$$\varphi : \mathscr{L}(E, F; G) \to \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G))$$

如下: 设 $f \in \mathscr{L}(E, F; G)$; $f(x, y)$ 是两个变量 $x \in E$ 及 $y \in F$ 的映射; 如果固定 x, 映射 $y \mapsto f(x, y)$ 是从 F 到 G 的映射, 记作 f_x (偏映射). 我们有

$$\|f_x(y)\| = \|f(x, y)\| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

因此

$$\|f_x\| \leqslant \|f\| \cdot \|x\| \tag{1.9.1}$$

并且这样就特别证明了 f 是连续线性映射 (由于它的范数是有限的). 于是 $x \mapsto f_x$ 是一映射 $g : E \to \mathscr{L}(F; G)$; 可立即证明它是线性的. 其次, (1.9.1) 可写成

$$\|g(x)\| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|,$$

因此 g 是连续的, 并且 $\|g\| \leqslant \|f\|$. 这样, 对于任何 $f \in (E, F; G)$, 有一个 $g \in \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G))$; 后者定义为 $\varphi(f)$. 这样确定了映射 φ. 不难证明 φ 是线性的. 其次, 因为 φ 把 f 变换成 g, 而且 $\|g\| \leqslant \|f\|$, 所以线性映射 φ 的范数 $\leqslant 1 : \|\varphi\| \leqslant 1$.

现在定义一个相反的映射

$$\psi : \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G)) \to \mathscr{L}(E, F; G)$$

为此, 从一个连续线性映射

$$g : E \to \mathscr{L}(F; G)$$

出发. 对于 $x \in E, g(x)$ 是一连续线性映射 $F \to G$; 因此, 对于 $x \in E, y \in F, g(x).y$ 是一双线性映射

$$f : E \times F \to G.$$

其次,

$$\|g(x)\| \leqslant \|g\| \cdot \|x\|,$$

从而

$$\|f(x,y)\| = \|g(x) \cdot y\| \leqslant \|g(x)\| \cdot \|y\| \leqslant \|g\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|;$$

这样就证明了 f 是连续双线性的, 并且

$$\|f\| \leqslant \|g\|.$$

于是每个 $g \in \mathscr{L}(E;\mathscr{L}(F;G))$ 确定一个 $f \in \mathscr{L}(E,F;G)$; 由定义, f 是 $\psi(g)$. 这样定义了映射 ψ. 不难证明 ψ 是线性的. 其次, 因为 ψ 把 g 变换成 f, 并且 $\|f\| \leqslant \|g\|$, 线性映射 ψ 的范数 $\leqslant 1$.

现在显然两映射 φ 与 ψ 是互逆的. 因为 $\psi \circ \varphi$ 是 $\mathscr{L}(E \times F;G)$ 中的恒等映射, 它的范数是 1. 由此得

$$1 = \|\psi \circ \varphi\| \leqslant \|\psi\| \cdot \|\varphi\|,$$

又因

$$\|\varphi\| \leqslant 1, \quad \|\psi\| \leqslant 1,$$

最后得到

$$\|\varphi\| = 1, \quad \|\psi\| = 1.$$

因此 φ 保持范数不变: 它是一个等距映射.

2. 可 微 映 射

2.1. 可微映射的定义

下面给出两个巴拿赫空间 E 及 F, 与一个非空开集 $U \subset E$. 考虑一些映射 $f: U \to F$. 在这些映射的集中; 每点 $a \in U$ 确定一个等价关系如下:

定义. 已给两映射 $f_1: U \to F$ 及 $f_2: U \to F$, 并考虑对于充分小的 $r > 0$ 所确定的数量

$$m(r) = \sup_{\|x-a\| \leqslant r} \|f_1(x) - f_2(x)\|$$

(由于 U 是开集); 如果 $m(r)$ 满足条件

$$\lim_{\substack{r \to 0 \\ r > 0}} \frac{m(r)}{r} = 0, \tag{2.1.1}$$

这条件也可写作

$$m(r) = o(r), \tag{2.1.2}$$

那么就说映射 f_1 及 f_2 在点 a 相切.

由条件 (2.1.2) 可导出: 映射 $f_1 - f_2$ 在点 a 连续, 并且在点 a 取值 0, 于是在点 a 相切的两映射在点 a 取同一值, 并且如果其中一映射在点 a 连续, 另一映射也在点 a 连续.

例. 设 g 是线性映射 (连续或不连续). 令

$$f(x) = g(x-a),$$

并且探讨 f 在点 a 是否与 O 相切. 我们有

$$m(r) = \|g\|r,$$

因此如果 $m(r)/r$ 随着 r 趋近于 0, 我们有 $\|g\| = 0$, 从而 g 恒等于零. 由此可见, 已给映射 $f: U \to F$, 存在着至多一个线性映射 $g: E \to F$, 使得映射

$$x \mapsto f(x) - f(a)$$

及映射

$$x \mapsto g(x-a)$$

在 a 相切. 而且如果这样的 g 存在, 由 f 在 a 连续可导出 g 在原点连续 (从而处处连续, 因 g 是线性的); 逆命题也成立.

定义. 已给 $f: U \to F$ 及点 $a \in U$. 如果下列条件成立:

(i) f 在点 a 连续;

(ii) 存在着线性映射 $g: E \to F$, 使得映射 $x \mapsto f(x) - g(x)$ 及 $x \mapsto g(x-a)$ 在点 a 相切,

那么就说 f 在点 a 可微.

上列定义中的条件可表示为

$$\|f(x) - f(a) - g(x-a)\| = o(\|x-a\|). \tag{2.1.3}$$

如上述, 如果 f 在点 a 可微, 它所确定的唯一线性映射 g 是连续的. 它是 $\mathscr{L}(E,F)$ 中的一个元素, 记作 $f'(a)$, 称为映射 f 在点 a 的导出映射.

一个等价的定义是: *如果 $g \in \mathscr{L}(E;F)$, 并且 (2.1.3) 成立, 那么 f 称为在点 a 可微*. 事实上, 由 g 连续可导出 f 在点 a 连续.

采用记号 $f'(a)$, (2.1.3) 又可写作

$$\|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\| = o(\|x-a\|). \tag{2.1.4}$$

例. 设 F 是实巴拿赫空间, 并设 U 是 $\mathbb{R}$ 中的开集; 那么 $f: U \to F$ 是单实变映射, 考虑到典型等距映射 $\mathscr{L}(\mathbb{R};F) \approx F, f$ 在点 a 可微等价于: 存在着元素 $c \in F$,

使得

$$\|f(x)-f(a)-(x-a)c\| = o(|x-a|);$$

换句话说, 当 x 趋近于 a 时, 商式

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (\text{对于 } x \neq a)$$

必有一极限 $c \in F$. 于是对于在巴拿赫空间 F 中取值的单实变映射, 我们又得到了它的导出映射的通常定义.

如果把极限 c 记作 $f'(a)$, 从 $\mathbb{R}$ 到 F 的线性映射

$$t \to tf'(a)$$

是 $\mathscr{L}(\mathbb{R};F)$ 中的元素, 它与 $f'(a)$ 在自然等距映射 $F \approx \mathscr{L}(\mathbb{R};F)$ 中相应, 这是 $\mathscr{L}(\mathbb{R};F)$ 中元素, 一般情形下已记作 $f'(a)$. 用同一记号 $f'(a)$ 表示 F 中的元素及 $\mathscr{L}(\mathbb{R},F)$ 中的相应元素, 并无不便.

当 F 是复巴拿赫空间时, 对于 $\mathscr{L}(\mathbb{C};F)$ 也可类似地进行讨论.

现在回到一般情形: $E \supset U \xrightarrow{f} F$.

定义. 如果 f 在 U 内任何点可微, 就说 f 在 U 内可微.

于是元素 $f'(a) \in \mathscr{L}(E;F)$ 依赖于 $a \in U$. 因此有一映射 $a \mapsto f'(a)$, 简单记作 f':

$$f': U \to \mathscr{L}(E,F).$$

作为定义, 这是可微映射 $f: U \to F$ 的导出映射. 注意导出映射 f' 可不与 f 在同一空间 F 中取值. 然而要记得: 如果 $E = \mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$), F 是实 (或复) 巴拿赫空间, 那么可以把 $\mathscr{L}(\mathbb{R};F)$ 与 F (或 $\mathscr{L}(\mathbb{C};F)$ 与 F) 看作相同. 因此, 对于单实 (或复) 变函数, 可把导出映射 f' 看作一个映射 $U \to F$.

定义. 已给映射 $f: U \to F$. 如果

1) f 在 U 内可微, 即在 U 内任一点可微;

2) 导出映射 $f': U \to \mathscr{L}(E;F)$ 是连续的,

那么 f 称为在 U 内连续可微, 或属于 C^1 类.

(不要忘记 $\mathscr{L}(E;F)$ 带有范数, 而且它事实上是一巴拿赫空间; 因此 U 及 $\mathscr{L}(E;F)$ 是拓扑空间.)

关于可微性概念的说明. 现总是设 f 是连续映射 $E \to F$, 其中 F 是一个巴拿赫空间, U 是一个巴拿赫空间 E 中的开集. 把 E 的范数用一个等价范数 (参看 1.6 段) 来代替; 把一个 $x \in E$ 的新范数记作 $\|x\|_1$, 原有范数记作 $\|x\|$; 同样, 把 F 的范数用一个等价的范数来代替. E 的拓扑没有改变, F 的也没有改变: 于是 U 仍然是开集, f 仍然是连续映射.

命题 2.1.1. 如果对于原有范数, f 在点 $a \in U$ 可微, 那么对于新范数, f 仍然在点 a 可微, 而且导出映射保持不变.

事实上, f 在点 a 可微, 并且有元素 $g \in \mathscr{L}(E;F)$ 作为导出映射这一事实, 可以用下列条件来表述:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0.$$

因为在 E 中, 范数 $\|\ \ \|$ 及 $\|\ \ \|_1$ 等价, 所以我们有

$$\frac{1}{\|x-a\|_1} \leqslant M \frac{1}{\|x-a\|},$$

这里 M 是一固定的数. 因为 F 中的范数 $\|\ \ \|$ 及 $\|\ \ \|_1$ 等价, 所以我们有

$$\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|_1 \leqslant M' \|f(x) - f(a) - g(x-a)\|,$$

这里 M' 是一固定的数. 由此得:

$$\frac{\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|_1}{\|x-a\|_1} \leqslant MM' \frac{\|f(x) - f(a) - g(x-a)\|}{\|x-a\|}.$$

由假设, 当 x 趋近于 a (保持 $\neq a$) 时, 上式右边趋近于 0, 从而左边同样也是这样. 证完.

2.2. 复合映射的导出映射

设 E, F, G 是三个巴拿赫空间, U 是 E 中的一个开集, V 是 F 中的一个开集. 考虑两个连续映射

$$f : U \to F, \quad g : V \to G$$

及一点 $a \in U$. 设 $b = f(a) \in F$, 实际上在 V 内. 那么 $f^{-1}(V)(\subset U)$ 是 E 中含 a 的一个开集; 在这开集 U' 内, 复合映射

$$g \circ f : U' \to G$$

是确定的.

定理 2.2.1. 在上述假设下, 如果 f 在点 a 可微, 并且如果 g 在点 $b = f(a)$ 可微, 那么 $h = g \circ f$ 在点 a 可微, 并且有

$$h'(a) = g'(b) \circ f'(a). \tag{2.2.1}$$

换句话说, 线性映射 $h'(a) : E \to G$ 是线性映射 $f'(a) : E \to F$ 与线性映射 $g'(f(a)) : F \to G$ 的复合映射.

证. 由假设

$$f(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\varphi(x-a),\tag{2.2.2}$$

其中 φ 是与 O 在原点相切的一个映射, 换句话说,

$$\|\varphi(x-a)\|=o(\|x-a\|).$$

同样, 由假设

$$g(y)=g(b)+g'(b)\cdot(y-b)+\psi(y-b),\tag{2.2.3}$$

其中

$$\|\psi(y-b)\|=o(\|y-b\|).$$

现估计 $h(x)-h(a)=g(f(x))-g(f(a))$: 应用含 y 的 (2.2.3), 而把 y 换成 $f(x)$, b 换成 $f(a)$. 于是得

$$h(x)-h(a)=g'(f(a))(f(x)-f(a))+\psi(f(x)-f(a)).$$

在这关系式中, 把 $f(x)-f(a)$ 用从 (2.2.2) 算出的值来代替, 并考虑到 $g'(f(a))$ 是线性映射 $F\to G$ 这一事实, 就得到:

$$\begin{aligned}h(x)-h(a)=&(g'(f(a))\circ f'(a))\cdot(x-a)\\&+g'(f(a))\cdot\varphi(x-a)+\psi(f(x)-f(a)).\end{aligned}$$

为了证明 h 在点 a 可微并且有导出映射 $g'(f(a))\circ f'(a)$, 只须证明上式右边第二及第三项与 O 相切, 这就是说,

$$\|g'(f(a))\cdot\varphi(x-a)\|=o(\|x-a\|),\tag{2.2.4}$$

$$\|\psi(f(x)-f(a))\|=o(\|x-a\|).\tag{2.2.5}$$

然而 (2.2.4) 可由下式得到:

$$\|g'(f(a))\cdot\varphi(x-a)\|\leqslant\|g'(f(a))\|\cdot\|\varphi(x-a)\|.$$

(2.2.5) 可由

$$\|\psi(f(x)-f(a))\|=o(\|f(x)-f(a)\|)$$

及从 (2.2.2) 导出的不等式

$$\|f(x)-f(a)\|\leqslant M\cdot\|x-a\|$$

得到 (这里 $M>\|f'(a)\|$ 是给定的); 上列不等式当 $\|x-a\|$ 充分小时成立, 这就是由 (2.2.2) 导出的.

定理 2.2.1 得证.

2.3. 导出映射的线性

考虑一般情形: U 是巴拿赫空间 E 中的开集, F 是一巴拿赫空间. 设 f 及 g 是两映射 $U \to F$; 它们的和 h 是由下式所确定的映射 $h: U \to F$:

$$h(x) = f(x) + g(x)(F \text{ 中的加法}).$$

同样, f 与纯量 λ 的乘积 λf 是由 $k(x) = \lambda \cdot f(x)$ 所确定的映射 $k: U \to F$.

命题 2.3.1. 采用上面的记号, 如果 f 及 g 在点 a 可微, 那么 $h = f + g$ 在点 a 可微, 并且有

$$h'(a) = f'(a) + g'(a).$$

如果 f 在点 a 可微, 那么 $k = \lambda f$ 在点 a 可微, 并且有

$$k'(a) = \lambda f'(a).$$

换句话说, 在点 $a(\in U)$ 可微的映射 $f: U \to f$ 的集在所有映射 $U \to F$ 的向量空间中. 而且是其中一个子向量空间 V_a; 映射 $f \mapsto f'(a)$ 是从 V_a 到 $\mathscr{L}(E, F)$ 中的一个线性映射. 同样可看出: (在 U 中) 属于 C^1 类的映射 $f: U \to F$ 的集是 V_a 的一个子向量空间.

2.4. 特殊映射的导出映射

命题 2.4.1. 如果 $f: U \to F$ 是一常值映射, 那么它是可微的, 而且对任何 $x \in U$, 它的导出映射 $f'(x)$ 是零.

根据定义, 这是显然的.

下面 (第 3 节) 我们将看到: 反过来说, 如果 f 可微并对任何 $x \in U, f'(x) = 0$, 而且如果 U 还是连通的, 那么 f 在 U 中是常量.

命题 2.4.2. 如果 $f: U \to F$ 是一个连续线性映射 $E \to F$ 的限制 (把它仍记作 f), 那么它是可微的, 并且

$$\text{对于任何 } x \in U, \quad f'(x) = f'.$$

[因此导出映射是常量; 不要忘记这常量是 $\mathscr{L}(E; F)$ 中的元素]. 由定义, 仍可看出这是显然的.

现研究连续双线性映射

$$f: E_1 \times E_2 \to F$$

的导出映射, 这里 E_1, E_2, F 表示三个巴拿赫空间. 但为了进入所讨论的范围, 首先必须在 $E_1 \times E_2$ 上定义一个巴拿赫空间的结构. 为此, 先在 $E_1 \times E_2$ 上确定向量空

间的结构, 即向量空间 E_1 与 E_2 的乘积: 乘积空间中的运算由下列公式定义:

$$\begin{cases}(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2),\\ \lambda(x_1,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)(x_1,y_1\in E_1;x_2,y_2\in E_2);\end{cases}$$

特别, $(x_1,x_2)=(x_1,0)+(0,x_2)$. 还要明确在向量空间 $E_1\times E_2$ 上选取什么范数; 令

$$\|(x_1,x_2)\|=\|x_1\|+\|x_2\|. \tag{2.4.1}$$

可证明: 这恰好是一范数, 它在 $E_1\times E_2$ 上确定了 E_1 及 E_2 的积拓扑, 而且对于这一范数, $E_1\times E_2$ 是完备的 (因为由假设, E_1 及 E_2 是完备的). 注意: 可不取 (2.4.1) 所定义的范数, 而用与它等价的其他范数来代替, 例如可取 $\sup(\|x_1\|,\|x_2\|)$ 作为范数的定义.

定理 2.4.3. 如果 $f:E_1\times E_2$ 是连续双线性的, 那么 f 是可微的, 并且它在点 (a_1,a_2) [这里 $a_1\in E_1,a_2\in E_2$] 的导出映射由下列公式确定:

$$f'(a_1,a_2)\cdot(h_1,h_2)=f(h_1,a_2)+f(a_1,h_2); \tag{2.4.2}$$

在这公式中, $h_1\in E_1,h_2\in E_2$; 公式左边表示 $f'(a_1,a_2)\in\mathscr{L}(E_1\times E_2;F)$ 在向量 $(h_1,h_2)\in E_1\times E_2$ 上的值.

证. 我们有

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1,a_2)=f(h_1,a_2)+f(a_1,h_2)+f(h_1,h_2);$$

如果我们证明了

$$\|f(h_1,h_2)\|=o(\|(h_1,h_2)\|),$$

定理得证. 既然 $\|(h_1,h_2)\|=\|h_1\|+\|h_2\|$, 而且

$$\|f(h_1,h_2)\|\leqslant\|f\|\cdot\|h_1\|\cdot\|h_2\|\leqslant\|f\|(\|h_1\|+\|h_2\|)^2.$$

又显然有 $(\|h_1\|+\|h_2\|)^2=o(\|h_1\|+\|h_2\|)$. 证完.

推广. 不考虑两个巴拿赫空间 E_1 及 E_2 的积, 而考虑积

$$E_1\times\cdots\times E_n,$$

这里 n 是任一正整数. 在这积上, 取积向量空间的结构及范数

$$\|(x_1,\cdots,x_n)\|=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|.$$

于是确定了积拓扑. 设

$$f:E_1\times\cdots\times E_n\to F$$

是一连续多重线性映射. 那么定理 2.4.3 可推广为: f 是可微的, 并且有

$$f'(a_1,\cdots,a_n)\cdot(h_1,\cdots,h_n)=f(h_1,a_2,\cdots,a_n)+f(a_1,h_2,a_3,\cdots,a_n)$$
$$+\cdots+f(a_1,\cdots,a_{n-1},h_n) \tag{2.4.3}$$

[在 $f(a_1,\cdots,a_n)$ 中, 依次把每个 a_i 用 h_i 来代替, 其他 a_i 则保持不变; 将所得各项求和, 就得到 (2.4.3) 式的右边], 证明可就 n 递推而得; 把它留给读者作为习题.

现给出最后一个例子: 在定理 1.7.3 中, 确定了从 $\mathrm{Isom}(E;F)$ (巴拿赫空间 $\mathscr{L}(E;F)$ 中一个开集) 到 $\mathrm{Isom}(F;E)$ (巴拿赫空间 $\mathscr{L}(F;E)$ 中一个开集) 上的一个连续映射

$$u\mapsto u^{-1}.$$

设 φ 是这映射; 因而有 $\varphi(u)=u^{-1}$. 我们可把 φ 看作是在巴拿赫空间 $\mathscr{L}(F;E)$ 中取值. 因而 φ 是否可微这一问题是有意义的. φ 的导出映射是

$$\mathscr{L}(\mathscr{L}(E;F);\mathscr{L}(F;E))$$

中一个元素.

定理 2.4.4. 采用上列记号, 在开集 $\mathrm{Isom}(E;F)\subset\mathscr{L}(E;F)$ 中, φ 属于 C^1 类, 并且它的导出映射由下式给出:

$$\varphi'(u)\cdot h=-u^{-1}\circ h\circ u^{-1}\ 其中\ h\in\mathscr{L}(E;F). \tag{2.4.4}$$

证. 先看 (2.4.4) 式右边的意义. 记号 $\circ$ 表示连续线性映射

$$F\xrightarrow{u^{-1}}E\xrightarrow{h}F\xrightarrow{u^{-1}}E$$

的复合, 于是 (2.4.4) 的右边是 $\mathscr{L}(F;E)$ 中的一个元素; 这是应有的结果.

为了证明 (2.4.4), 给予 u 一个 "增量" h:

$$\begin{aligned}\varphi(u+h)-\varphi(u)&=(u+h)^{-1}-u^{-1}\\&=(u+h)^{-1}\circ(u-(u+h))\circ u^{-1}\\&=-(u+h)^{-1}\circ h\circ u^{-1}.\end{aligned}$$

为了证明定理, 只须证明: 固定 $u\in\mathrm{Isom}(E;F)$, $(u+h)^{-1}\circ h\circ u^{-1}$ 与 (对 h 线性) 映射 $u^{-1}\circ h\circ u^{-1}$ 之间的差是 $o(\|h\|)$. 然而

$$(u+h)^{-1}\circ h\circ u^{-1}-u^{-1}\circ h\circ u^{-1}=((u+h)^{-1}-u^{-1})\circ h\circ u^{-1},$$

由此得

$$\|(u+h)^{-1}\circ h\circ u^{-1}-u^{-1}\circ h\circ u^{-1}\|\leqslant\|(u+h)^{-1}-u^{-1}\|\cdot\|u^{-1}\|\cdot\|h\|.$$

因此只须证明: 当 h 趋近于 0 时, $\|(u+h)^{-1}-u^{-1}\|$ 趋近于 0; 情况正好如此, 这是由于映射 $u \mapsto u^{-1}$ 是连续的 (定理 1.7.3).

这样我们证明了 φ 在任何点 $u \in \operatorname{Isom}(E;F)$ 可微, 而且它的导出映射 $\varphi'(u)$ 是由公式 (2.4.4) 给出的. 为了证明 φ 属于 C^1 类, 还只要证明映射

$$\varphi' : \operatorname{Isom}(E;F) \to \mathscr{L}(\mathscr{L}(E;F);\mathscr{L}(F;E))$$

是连续的. 为此引进一个记号: 对于 $v \in \mathscr{L}(F;E), w \in \mathscr{L}(F;E)$, 把从 $\mathscr{L}(E;F)$ 到 $\mathscr{L}(F;E)$ 的线性映射

$$h \mapsto -v \circ h \circ w$$

记作 $\psi(v,w)$. 那么 (2.4.4) 表明

$$\varphi'(u) = \psi(u^{-1}, u^{-1}).$$

然而从 $\mathscr{L}(F;E) \times \mathscr{L}(F;E)$ 到 $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E;F);\mathscr{L}(F;E))$ 的映射 $(v,w) \mapsto \psi(v,w)$ 是双线性的; 它是连续的, 这是由于

$$\|\psi(v,w)\cdot h\| = \|v \circ h \circ w\| \leqslant \|v\| \cdot \|h\| \cdot \|w\|,$$

而由上式可导出 (参看关系式 (1.4.2) 及它下面几行):

$$\|\psi(v,w)\| \leqslant \|v\| \cdot \|w\|.$$

因此 ψ 是连续双线性映射. 由此可见, 映射

$$u \mapsto \varphi'(u) = \psi(u^{-1}, u^{-1})$$

是从 $\operatorname{Isom}(E;F)$ 到

$$\mathscr{L}(F;E) \times \mathscr{L}(F;E)$$

的连续映射 $u \mapsto (u^{-1}, u^{-1})$ 以及连续映射 $(v,w) \mapsto \psi(v,w)$ 的复合. 因此复合映射是连续的. 证完.

注意: 以后要看到这映射还是可微的.

定理 2.4.4 的特别情形. 假定 $E = F = \mathbb{R}$ (或在复数情形 $E = F = \mathbb{C}$). 那么线性映射 $E \to F$ 由一纯量确定, 把它记作 u; 要使得 u 所确定的映射是一同构, 必须而且只须 $u \neq 0$. 于是 $\operatorname{Isom}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 与元素 $u \neq 0$ 所组成的 $\mathbb{R}$ 中开集相同. 这时由定理 2.4.4, 映射 $u \mapsto 1/u$ 是可微的, 并且它的导数是 $-1/u^2$. 这是很经典的结果!

2.5. 在几个巴拿赫空间的积中取值的映射

设空间 F 是有限 k 个巴拿赫空间的积:

$$F = F_1 \times \cdots \times F_k.$$

引进下列记号: 对于满足 $1 \leqslant i \leqslant k$ 的每个整数 i, 设

$$p_i : F \to F_i$$

是 F 在它的第 i 个因子上的投影映射, 并且设

$$u_i : F_i \to F$$

是由

$$u_i(x_i) = (0, \cdots, x_i, \cdots, 0)$$

[除了在第 i 个位置外, 处处取值 0] 所确定的单射. 可证明 p_i 及 u_i 是连续线性映射, 并且它们满足关系式

$$\begin{cases} p_i \circ u_i = 1_{F_i} \quad (F_i \text{ 的恒等映射}); \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} u_i \circ p_i = 1_F \quad (F \text{ 的恒等映射}). \end{cases} \tag{2.5.1}$$

命题 2.5.1. 采用上列记号, 设 $f : U \to F$ 是一连续映射, U 总是表示巴拿赫空间 E 中的一个开集. *要使得 f 在点 $a \in U$ 可微, 必须而且只须对于每个 $i (1 \leqslant i \leqslant k)$,* **映射** *$f_i = p_i \circ f : U \to F_i$ 在点 a 可微, 于是*

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{k} u_i f_i'(a). \tag{2.5.2}$$

证明是容易的. 线性映射 p_i 及 u_i 可微. 因此如果 f 可微, 复合映射 $p_i \circ f$ 也可微 (定理 2.2.1) 并且有导出映射

$$f_i'(a) = p_i \circ f'(a) \in \mathscr{L}(E; F_i).$$

相反地, 设对任何整数 $i (1 \leqslant i \leqslant k), f_i$ 在点 a 可微; 由 (2.5.1) 中第二个关系式得

$$\sum_{i=1}^{k} u_i \circ p_i \circ f = f,$$

这就是说, $f = \sum_{i=1}^{k} u_i \circ f_i$; 因此 (由定理 2.2.1 及命题 2.3.1) f 在点 a 可微, 并且

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{k} u_i \circ f_i'(a).$$

证完.

注意. 要使 $f' : U \to \mathscr{L}(E; F)$ 连续, 必须而且只须对于每个 $i, f_i' : U \to \mathscr{L}(E; F_i)$ 连续.

例. 上列命题特别可应用于 $F=\mathbb{R}^k$ (或 $\mathbb{C}^k$) 情形; 这时我们取

$$F_1=\cdots=F_k=\mathbb{R}\ (\text{或}\ =\mathbb{C}).$$

给出 $f:U\to\mathbb{R}^k$ 相当于给出 k 个数值函数 $f_i:U\to\mathbb{R}$ (即 $f_i=p_i\circ f$); 要使 f 可微, 必须而且只须每个 f_i 可微, 于是 $f'(a)$ 是线性映射 $E\to\mathbb{R}^k$, 它的 k 个分量是 $f_1'(a),\cdots,f_k'(a)$.

应用. 如同在 2.4 段, 考虑连续双线性映射 $f:E_1\times E_2\to F$; 另一方面, 设 $u:U\to E_1$ 及 $v:U\to E_2$ 是两个连续映射. 给出 f, 就可使映射 u 及 v 在它们之间 "相乘"; 确切地说, 这样用下列公式确定了 $w:U\to F$:

$$w(x)=f(u(x),v(x)). \tag{2.5.3}$$

命题 2.5.2. *用上面的记号, 设 u 及 v 在点 $a\in U$ 可微; 那么 w 在这点可微, 并且 $w'(a)$ 由下式确定:*

$$w'(a)\cdot h=f(u'(c)\cdot h,v(a))+f(u(a),v'(a)\cdot h), \tag{2.5.4}$$

这里 $h\in E$.

证. 由命题 2.5.1, 从 U 到 $E_1\times E_2$ 的映射 $x\to(u(x),v(x))$ 在点 a 可微, 并且它的导出映射是线性映射

$$h\to(u'(a)\cdot h,v'(a)\cdot h).$$

另一方面, 映射 $f:E_1\times E_2\to F$ 在 $E_1\times E_2$ 中任一点可微, 因为它是连续双线性的 (定理 2.4.3). (2.5.3) 所确定的映射 w 是复合映射

$$U\xrightarrow{(u,v)}E_1\times E_2\xrightarrow{f}F;$$

因此 (定理 2.2.1) 它在点 a 可微, 并且它的导出映射等于若干导出映射的复合映射.

解释这一导出映射如下: 在关系式 (2.4.2) 中, 必须把 a_1 换成 $u(a)$, 把 a_2 换成 $v(a)$, 把 h_1 换成 $u'(a)\cdot h$, 把 h_2 换成 $v^1(a)\cdot h$; 于是正好得到要证明的关系式 (2.5.4) 的右边. 证完.

特殊情形. 设 $E=\mathbb{R}$, 即设 u 及 v 是一个数值变量 x 的映射. 那么我们知道 $u'(a)\cdot h$ 就是 $h\cdot u'(a)(u'(a)\in E_1$ 与纯量 h 的积), $v'(a)\cdot h$ 就是 $h\cdot v'(a),w'(a)\cdot h$ 就是 $h\cdot w'(a)$. 于是令 $h=1$, 由关系式 (2.5.4) 得

$$w'(a)=f(u'(a),v(a))+f(u(a),v'(a)). \tag{2.5.5}$$

这里我们看到了两个单数值变量的映射 u 及 v 的 "积" 的导出映射公式: 例如在 $\mathbb{R}^3$ 中取值的两个映射的向量积, 在 $\mathbb{R}^n$ 中取值的两个映射的内积. 如果 $E_1=E_2=A$ 是

巴拿赫代数 (参看 1.7 段), $f: A \times A \to A$ 是这代数中的积, 上列公式可以应用. 这时 (2.5.5) 写成

$$(uv)'(a) = u'(a)v(a) + v(a)u'(a).$$

最简单的情形是代数 A 为纯量域的情形, 这时我们又得到了对两个数值函数的积求导数的常用公式.

2.6. U 是几个巴拿赫空间的积中开集情形

现设 $E = E_1 \times \cdots \times E_n$, 并且 U 是 E 中一开集. 设 $f: U \to F$ 是连续映射. 对于每个 $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$, 考虑由下式所确定的单射 $\lambda_i: E_i \to E$

$$\lambda_i(x_i) = (a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_n).$$

复合映射 $f \circ \lambda_i$ 是在包含 $a_i \in E_i$ 的开集 $(\lambda_i)^{-1}(U) \subset E_i$ 中确定的; 这一映射称为在点 a 的第 i 个偏映射.

命题 2.6.1 及定义. 用上面的记号, 如果 f 在点 a 可微, 那么对于每个整数 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$, 偏映射 $f \circ \lambda_i$ 在点 a_i 可微. 把这一偏映射在点 a_i 的导出映射, 记作 $f'_{x_i}(a)$, 或 $\partial f/\partial x_i(a)$, 或 $f'_{x_i}(a_1, \cdots, a_n)$, 或 $\partial f/\partial x_i(a_1, \cdots, a_n)$; 它是 $\mathscr{L}(E_i; F)$ 中的一个元素, 也称为 f 对于 x_i 的偏导出映射. 而且还有; 对于 $h_1 \in E_1, \cdots, h_n \in E_n$,

$$f'(a) \cdot (h_1, \cdots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a) \cdot h_i. \tag{2.6.1}$$

证. 把由下式确定的标准单射记作 $u_i: E_i \to E$

$$u_i(x_i) = (0, \cdots, 0, x_i, 0, \cdots, 0).$$

u_i 是连续线性映射. 显然有

$$\lambda_i(u_i) = a + u_i(x_i - a_i), \lambda_i(a) = a; \tag{2.6.2}$$

由此得: 对于任何 $x_i \in E_i$,

$$\lambda'_i(x_i) = u_i. \tag{2.6.3}$$

如果 f 在点 a 可微, 那么 $f \circ \lambda_i$ 在点 a_i 可微 (定理 2.2.1), 并且 $(f \circ \lambda_i)' = f'(a) \circ u_i$. 于是 $f'_{x_i}(a)$ 存在, 并且恰好是 $f'(a) \circ u_i$.

关系式 (2.6.1) 是由关系式

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \circ p_i = 1_E \quad (\text{参看 } (2.5.1))$$

导出的. 由这关系式推得

$$\sum_{i=1}^{n}(f'(a)\circ u_i)\circ p_i = f'(a), \tag{2.6.4}$$

而这式只是 (2.6.1) 的另一种写法.

注意. 与命题 2.5.1 所述情况不同, 由命题 2.6.1 不能断定: 如果偏导出映射 $f'_{x_i}(a)$ 存在, 那么导出映射 $f'(a)$ 存在. 在第 3 节中将讨论这一问题.

现设 f 在 U 中任何点可微, 并且设

$$f' : U \to \mathscr{L}(E;F)$$

是导出映射. 那么 "偏导出" 映射

$$f'_{x_i} : U \to \mathscr{L}(E_i;F)$$

是 f' 与线性映射

$$\mathscr{L}(E;F) \to \mathscr{L}(E_i;F) \tag{2.6.5}$$

的复合映射; (2.6.5) 把任何连续线性映射 $\varphi : E \to F$ 与 $\varphi \circ u_i : E_i \to F$ 相联系; 事实上, 这是由下列关系式导出的:

$$f'_{x_i}(a) = f'(a)\circ u_i. \tag{2.6.6}$$

线性映射 (2.6.5) 有 $\leqslant 1$ 的范数, 从而连续. 因此如果导出映射 f' 连续, 映射 f'_{x_i} 也连续. 逆命题也是正确的, 因为关系式 (2.6.4) 表明: 映射 f' 等于一些复合映射

$$U \xrightarrow{f'_{x_i}} \mathscr{L}(E_i;F) \to \mathscr{L}(E;F)$$

的和, 这里 $\mathscr{L}(E_i;F) \to \mathscr{L}(E;F)$ 是线性映射, 它把 $\varphi_i \in \mathscr{L}(E_i;F)$ 与 $\varphi_i \circ p_i \in \mathscr{L}(E;F)$ 相联系.

总之得:

命题 2.6.2. 如果 f 在 U 中任何点可微, 那么 f 属于 C^1 类的一个必要与充分条件是: $f'_{x_i} : U \to \mathscr{L}(E_i;F)$ 都是连续映射.

2.7. 2.5 及 2.6 段中所研究情形的组合

同时设 $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ 及 $F = F_1 \times \cdots \times F_m$. 设 U 是 E 中的开集, 并且设 $f : U \to F$ 是在点 $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$ 的可微映射. 那么 $p_i \circ f = f_i$ (其中 $p_i : F \to F_i$ 是投影) 都在点 a 可微, 从而有偏导出映射 $\partial f_i/\partial x_j(a)(1 \leqslant i < m, 1 \leqslant j \leqslant n)$. 我们有

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \in \mathscr{L}(E_j;F_i),$$

并且

$$f'(a) = \sum_{i,j} u_i \circ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \circ q_j, \tag{2.7.1}$$

这里

$$\begin{cases} q_j : E \to E_j \text{ 是标准投影}, \\ u_i : F_i \to F \text{ 是标准单射}. \end{cases}$$

于是线性映射 $f'(a)$ 是由 $(\partial f_i/\partial x_j)(a)$ 所构成的矩阵决定的; 这是 m 行、n 列的矩阵 (i 是行的指标, 第 i 行相应于空间 F_i; j 是列的指标, 第 j 列相应于空间 E_j). 可以证明 (作为习题!): 如果我们还有一个巴拿赫空间 $G = G_1 \times \cdots \times G_p$, 一个从开集 $V \subset G$ 到 $U \subset E$ 的连续映射, 这一映射在点 $b \in V$ 可微, 而且 $g(b) = a$, 并且如果把复合映射 $f \circ g : V \to F$ 记作 h, 那么矩阵 $[(\partial h_i/\partial y_k)(b)]$ (这里 y_k 在 G_k 中变动,$1 \leqslant k \leqslant p$) 等于矩阵 $(\partial g_j/\partial y_k)(b)$ 乘以矩阵 $(\partial f_i/\partial x_j)(a)$ 的积; 换句话说,

$$\frac{\partial h_i}{\partial y_k}(b) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \circ \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(b). \tag{2.7.2}$$

这很容易从复合映射求导出映射的定理得出:

$$h'(b) = f'(a) \circ g'(b).$$

以上所述特别可应用于 $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^m$ (即 $E_1 = \cdots = E_n = \mathbb{R}, F_1 = \cdots = F_m = \mathbb{R}$) 情形. 这时 $(\partial f_i/\partial x_j)(a) \in \mathbb{R}$. 如果还有 $G = \mathbb{R}^p$ (即 $G_1 = \cdots = G_p = \mathbb{R}$), $(\partial g_j/\partial y_k)(b)$ 也是纯量, 并且在 (2.7.2) 的右边, 记号 $\circ$ 简单地表示纯量的乘法, 如同在元素为纯量的两个矩阵的经典乘积中一样.

2.8. 最后的注记: $\mathbb{R}$ 可微性及 $\mathbb{C}$ 可微性的比较

如前已指出, 上述理论既可应用于实巴拿赫空间, 也可应用于复巴拿赫空间. 现比较这两种理论.

设 E 及 F 是域 $\mathbb{C}$ 上的两个巴拿赫空间; 我们也可把它们看作域 $\mathbb{R}$ 上的空间. 只须在考虑向量与纯量的积时, 把纯量限于实数. 例如 $\mathbb{C}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的一维向量空间; 至于它隐含的实结构, 则是 $\mathbb{R}$ 上的二维向量空间.

已设 E 及 F 是 $\mathbb{C}$ 上的巴拿赫空间, 现设 U 是 E 中的开集, 并设 $f : U \to F$ 是连续映射. 最后设 $a \in U$. 可以考虑 f 的两个性质:

(i) 对于 $\mathbb{C}$ 上的 e.v. 结构, f 在点 a 可微;

(ii) 对于 $\mathbb{R}$ 上的 e.v. 结构, f 在点 a 可微.

在第一种情形, 导出映射 $f'(a)$ 是连续线性映射 $E \to F$, 这里 "线性" 表示 $\mathbb{C}-$ 线性. 为了更确切, 把从 E 到 F 的连续 $\mathbb{C}-$ 线性映射所构成的 (完备赋范) 向量空间记作 $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E; F)$. 在第二种情形, 导出映射 $f'(a)$ 是连续 $\mathbb{R}-$ 线性映射 $E \to F$. 为了更确切, 把从 E 到 F 的连续 $\mathbb{R}-$ 线性映射所构成的巴拿赫空间记作 $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E; F)$.

一个 $\mathbb{C}-$ 线性映射更加是 $\mathbb{R}$ 线性的; 因此 $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E;F) \subset \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E;F)$; 巴拿赫空间 $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E;F)$ 是 $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E;F)$ 的一个子空间, 而且由于它是完备的, 它是一个闭子空间.

上列条件 (i) 表明: 存在着必然是唯一的 $g \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E;F)$, 使得 $\|f(x)-f(a)-g(x-a)\| = o(\|x-a\|)$. 条件 (ii) 表明: 存在着必然是唯一的 $g \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E;F)$ 使得

$$\|f(x)-f(a)-g(x-a)\| = o(\|x-a\|).$$

因此显然由条件 (i) 可导出条件 (ii): 如果 f 在点 a 是 $\mathbb{C}-$ 可微的, 那么 f 在点 a 更加是 $\mathbb{R}-$ 可微的, 而且它的导出映射 $f'(a)$ 在实数意义下和在复数意义下是相同的.

相反地, 设 f 在点 a 是 $\mathbb{R}-$ 可微的, 并且它的导出映射是 $f'(a) \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E;F)$. 要使 f 在点 a 是 $\mathbb{C}-$ 可微的, 必须而且只须 $f'(a)$ 属于 $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E;F)$ 的一子向量空间 $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E;F)$.

特别讲述 $\mathbb{C}-$ 可微函数论属于《数学 II》课程的部分内容[①]: 这些函数也称为全纯函数, 特别要研究 $\mathbb{C}$ 中开集上的全纯函数.

3. 有限增量定理; 应用

"有限增量" 这一名词可用历史上的原因来解释: "有限" 增量概念是与 "无穷小" 增量概念相对照的, 而后者是过去在微分学中研究的.

3.1. 主要定理的叙述

定理 3.1.1. 设 a 及 b 是 $\mathbb{R}$ 中满足 $a<b$ 的两点. 把这两点确定的闭区间记作 $[a,b]$. 设已给两个连续映射

$$f:[a,b]\to F, \quad g:[a,b]\to\mathbb{R},$$

这里 F 是一个巴拿赫空间. 设 f 及 g 在开区间 $]a,b[$ 中任何点可微, 并且

$$\|f'(x)\| \leqslant g(x) \quad 对于 \quad a<x<b. \tag{3.1.1}$$

那么我们有

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant g(b)-g(a) \tag{3.1.2}$$

我们要证明一个略为强一点的定理, 但它的证明并不更难. 在叙述这定理前, 必须先给出一个定义.

定义. 设有映射 $f:[a,b]\to F$, 并且 $x\in[a,b[$, 如果

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))$$

[①]译者注: 这是按法国大学数学专业的课程设置讲的. 有关内容包含在我国数学专业《复变函数》课程中.

存在, 把上列极限记作 $f'_{\mathrm{d}}(x)$, 称为 f 在点 x 的右导出元素. 它是 F 中一个元素. 设 $x \in]a,b]$, 如果下列极限存在, 同样定义 f 在点 x 的左导出元素:

$$f'_{\mathrm{g}}(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)).$$

要使 $f(x)$ 在点 $x \in]a,b[$ 有导出元素 $f'(x)$, 必须而且只须 $f'_{\mathrm{d}}(x)$ 及 $f'_{\mathrm{g}}(x)$ 存在并且相等: 这是显然的.

定理 3.1.2. 定理叙述大体同定理 3.1.1, 但需作下列改动: 只设 $f'_{\mathrm{d}}(x)$ 及 $g'_{\mathrm{d}}(x)$ 在任何点 $x \in]a,b[$ 存在, 并且把不等式 (3.1.1) 换成

$$\|f'_{\mathrm{d}}(x)\| \leqslant g'_{\mathrm{d}}(x) \quad 对于 \quad a < x < b. \tag{3.1.1$_{\mathrm{d}}$}$$

结论是同样的: 仍然是不等式 (3.1.2).

这样我们减弱了定理 3.1.1 中的假设, 而结论保持不变. 因此定理 3.1.2 比定理 3.1.1 强.

定理 3.1.2 的证. 给出一数 $\varepsilon > 0$. 要证明对于任何 $x \in [a,b]$,

$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant g(x) - g(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon. \tag{3.1.3}$$

上式证明后, 对 $x = b$ 应用它, 然后令 ε 趋近于 0, 取极限, 就得到定理叙述中的不等式 (3.1.2).

设对于某些 $x \in [a,b]$, (3.1.3) 不成立, 也就是

$$\|f(x) - f(a)\| > g(x) - g(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon. \tag{3.1.4}$$

设这些 x 所构成的集是 U. 我们要证明 U 是空集. 我们已知 U 是开集: 事实上, 已设 f 及 g 连续, 因此不等式 (3.1.4) 的两边都是 x 的连续函数. 然而设 φ 是取数值的连续函数, 满足 $\varphi(x) > 0$ 的 x 所构成的集是开集. 因此 U 是开集. 用反证法, 假定 U 不是空集. 那么 U 应有下确界 c, 于是考虑下列三种情形.

(i) $c > a$; 事实上, 由于关系式 (3.1.3) 两边连续, 对于充分接近 a 的任何 x, 这一关系式成立;

(ii) $c \notin U$, 因为 U 是开集: 假定 c 属于 U, 就应有 x 满足 $a < x < c$ 及 $x \in U$, 而 c 就不应是 U 的下确界;

(iii) $c < b$, 否则 U 就变成了一点 b, 从而不可能是开集.

既然 $a < c < b$, 可对 c 应用定理中的假设:

$$\|f'_{\mathrm{d}}(c)\| \leqslant g'_{\mathrm{d}}(c). \tag{3.1.5}$$

由 $f'_{\mathrm{d}}(c)$ 及 $g'_{\mathrm{d}}(c)$ 定义, 存在着一个闭区间 $c \leqslant x \leqslant c+\eta$ (这里 $\eta > 0$), 在其中有

$$\|f'_{\mathrm{d}}(c)\| \geqslant \left\|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right\| - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$g'_{\mathrm{d}}(c) \leqslant \frac{g(x)-g(c)}{x-c} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

由这些不等式及 (3.1.5) 可导出

$$\|f(x)-f(c)\| \leqslant g(x)-g(c)+\varepsilon(x-c). \tag{3.1.6}$$

然而我们已看到 $c \notin U$; 换句话说, 我们有

$$\|f(x)-f(a)\| \leqslant g(c)-g(a)+\varepsilon(c-a)+\varepsilon. \tag{3.1.7}$$

由不等式 (3.1.6) 及 (3.1.7) 得

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(a)\| &\leqslant \|f(x)-f(c)\|+\|f(c)-f(a)\| \\ &\leqslant g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon.\end{aligned}$$

上式对 $c \leqslant x \leqslant c+\eta$ 成立. 于是 (3.1.3) 对 $c \leqslant x \leqslant c+\eta$ 成立. 但任何 $x \leqslant c+\eta$ 满足 (3.1.3), 而且 U 的下确界 $\geqslant c+\eta$. 因而得一矛盾. 证完.

注意. 在定理 3.1.2 中, 把右导出元素换成左导出元素, 就可得到一个类似的定理. 为此, 要把 x 换成 $-x$.

补充. 还指出比定理 3.1.2 更强的一个定理.

定理 3.1.3. *设 $f:[a,b]\to F$ 及 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是两个连续映射. 设对任何 $x\in[a,b]$, 可能除去一个可数集 D 中各点外, $f'_{\mathrm{d}}(x)$ 及 $g'_{\mathrm{d}}(x)$ 存在, 并且满足 $(3.1.1)_{\mathrm{d}}$, 那么我们有*

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant g(b)-g(a). \tag{3.1.2}$$

对证明的提示. 把 D 中的点排成一个序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$. 对每个 $x\in[a,b]$, 用 N_x 表示满足 $x_n < x$ 的整数 $n>0$ 所构成的集. 于是不像在定理 3.1.2 中那样要证明 (3.1.3), 而是要证明

$$\|f(x)-f(a)\| \leqslant g(x)-g(a)+\varepsilon\left(\sum_{n\in N_x} 2^{-n}\right)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon.$$

证明上式后, 令 $x=b$, 并且令 ε 趋近于 0.

3.2. 主要定理的特殊情形

在定理 3.1.2 中, 设空间 F 缩减成 $\{0\}$. 那么假设化为 $g'_{\mathrm{d}}(x)\geqslant 0$, 并且结论变成了 $g(b)\geqslant g(a)$. 因为可把这结果应用到 $[a,b]$ 中任意两点 x_1 及 x_2, 所以只要 $x_1<x_2$, 就有 $g(x_2)\geqslant g(x_1)$. 这样就得到:

系 3.2.1. *如果 $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续, 并且对任何 $x\in]a,b[$, 有右导数 $g'_{\mathrm{d}}(x)\geqslant 0$, 那么 g 在区间 $[a,b]$ 内是 (广义) 增函数.*

逆命题是明显的: 如果一个增函数有右导数, 那么右导数 $\geqslant 0$.

现设 $g(x) = kx$ (k 是常数 $\geqslant 0$), 并且应用定理 3.1.2. 于是假设 $(3.1.1)_{\mathrm{d}}$ 变成了 $\|f'_{\mathrm{d}}(x)\| \leqslant k$. 由此得:

系 3.2.2. 设 $f : [a, b] \to F$ 是连续映射 (这里 F 是巴拿赫空间). 设对于任何 $x \in]a, b[$, f 有右导出元素 $f'_{\mathrm{d}}(x)$, 并且设

$$\|f'_{\mathrm{d}}(x)\| \leqslant k \quad (k \text{ 是常数 } \geqslant 0).$$

那么就有

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant k(b - a),$$

并且更一般地, 对任何 $x_1, x_2 \in [a, b]$,

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leqslant k|x_2 - x_1|. \tag{3.2.1}$$

3.3. 变量在巴拿赫空间中的有限增量定理

到现在为止, f 是单实变映射. 现设 U 是巴拿赫空间 E 中的一个开集, 并且设 $f : U \to F$ 是一连续映射, 这里 F 也是一个巴拿赫空间. 现提出: 如果 a 及 b 是 E 中两点, 那么考虑 E 中所有形如

$$x = (1 - t)a + tb \quad (\text{其中 } 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

的点 x 所构成的集, 并且把它称为端点是 a 及 b 的线段.

命题 3.3.1. 如果 f 在 U 中可微, 并且如果端点是 a 及 b 的线段包含在 U 内, 那么有

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|b - a\| \cdot \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|f'((1 - t)a + tb)\|. \tag{3.3.1}$$

证. 设 $h(t) = f((1 - t)a + tb)$. 这是 t 的一个可微映射, 并且我们有 (参看 2.2 段关于复合映射的导数的定理)

$$h'(t) = f'((1 - t)a + tb) \cdot (b - a),$$

由此得

$$\|h'(t)\| \leqslant \|f'((1 - t)a + tb)\| \cdot \|b - a\|.$$

应用系 3.2.2 (其中 f 要换成 h): 就得到 (3.3.1). 证完.

现设开集 U 是凸的, 即对 U 中任一对点 (a, b), 端点是 a 及 b 的线段包含在 U 内. 于是由命题 3.3.1 可立即导出:

定理 3.3.2. 设 U 是一个巴拿赫空间 E 中的凸开集, 并且设 $f : U \to F$ 是在一个巴拿赫空间 F 中取值的可微映射. 设对任何 $x \in U$,

$$\|f'(x)\| \leqslant k.$$

那么对任何 $x_1 \in U$, 任何 $x_2 \in U$, 我们有

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leqslant k\|x_2 - x_1\| \tag{3.3.2}$$

作为定义, 满足 (3.3.2) 的映射称为有常数 k 的李普希茨映射, 或 k 李普希茨映射 (对于任意两个度量空间及它们之间的映射, 也可作出相应定义).

系 3.3.3. 在上面的假设下, 设 $k = 0$, 即对 $x \in U, f'(x) = 0$, 那么 f 在 U 中是常量.

现在要看到, 这系不仅在 U 是凸集时成立, 而且更一般地当它是连通集时也成立.

现回忆一下. 设 X 是拓扑空间; 如果只要 X 是两个不相交开集的并集, 一个开集必然是空集 (另一个是 X), 那么 X 就叫做连通的.

定理 3.3.4. 设 U 是巴拿赫空间 E 中的一个连通开集, 设 $f : U \to F$ 是在一个巴拿赫空间 F 中取值的可微映射. 如果导出映射 $f'(x)$ 对于任何 $x \in U$ 为零, 那么 f 是常量.

证. 设 a 是 U 中任一点; U 包含心为 a 的一个开球 B; 这个球是凸的, 因此由系 3.3.3, f 在 B 中是常量. 于是 f 在 U 内局部常量 [按照定义, 已给在拓扑空间上确定的映射; 如果这映射在每点的邻域中是常量, 就说这映射在已给空间中局部是常量]. 我们还没有用到定理中 U 是连通的这一假设. 现在要用到它: 为此, 证明一个引理,

引理. 设 $f : X \to Y$ 是从非空拓扑空间 X 到可分拓扑空间 Y 的一个连续映射. 如果 f 局部是常量, 并且如果 X 是连通的, 那么 f 在 X 中是常量.

由这引理显然可导出定理 3.3.4. 现在证明这引理: 设 $b \in Y$; 逆像 $f^{-1}(b)$ 是 X 中的闭集, 这是因为 f 是连续的, 并且集 $\{b\} \subset Y$ 是闭集 (Y 的拓扑是可分的). 另一方面, $f^{-1}(b)$ 是开集, 这是因为 f 局部是常量. 于是 $f^{-1}(b)$ 同时是开集和闭集; 因此 X 是开集 $f^{-1}(b)$ 和它的余集的并集, 而这一余集也是开集. 因已设 X 是连通的, $f^{-1}(b)$ 和它的余集中有一个是 X. 于是取一点 $a \in X$, 并且选取 $b = f(a)$; 那么 $f^{-1}(b)$ 不是空集, 从而 $f^{-1}(b) = X$, 这样就证明了对任何 $x \in X, f(x) = b$.

定理 3.3.4 给出的结果比系 3.3.3 好: 事实上, 任何凸开集是连通的. 这可由下一命题导出, 这命题给出了判断 U 是否连通的一个判别法:

命题 3.3.5. 设 U 是 (域 $\mathbb{R}$ 上) 赋范向量空间中的一个开集, 下列条件是等价的:

(a) U 是连通集;

(b) U 中任意两点可用 U 中一条道路联结起来;

(c) U 中任意两点可用 U 中一条折线联结起来.

在证明前, 必须先准确定义 (b) 及 (c) 的叙述中所用名词.

定义. 在一个拓扑空间 X 中, 从闭区间 $[0,1]\subset\mathbb{R}$ 到空间 X 的连续映射称为一条道路; 点 $\varphi(0)$ 称为道路的起点, 点 $\varphi(1)$ 称为终点. 设两点 a 及 $b\in X$; 如果存在着一条道路 φ, 使得 $\varphi(0)=a$ 及 $\varphi(1)=b$, 就说这两点可被一条道路联结起来.

定义. 在域 $\mathbb{R}$ 上赋范向量空间 E 中的一个集 A 中, 一条折线就是满足下列条件的一条道路 $\varphi:[0,1]\to A$: 在线段 $[0,1]$ 上有有限个点:

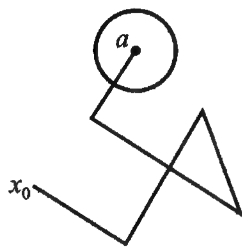
$$t_0=0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=1$$

使得在每个闭区间 $[t_i,t_{i+1}](0\leqslant i\leqslant n-1)$ 中, 映射 φ 是一个线性映射及一个常量的和 ($[t_i,t_{i+1}]$ 通过 φ 所映射出的像是向量空间 E 中的直线段).

命题 3.3.5 的证明. 显然 (c)⇒(b). 现依次证明 (b)⇒(a) 及 (a)⇒(c); 这样就证明了 (a), (b), (c) 等价.

(b)⇒(a) 的证明 [这证明对任何拓扑空间都适用, 而不是仅仅适用于赋范 e.v. 中的开集]: 设 (b) 是正确的. 按反证法推理, 假定 U 中含两个不相交的非空开集 U_0 及 U_1, 并且 U 是 U_0 及 U_1 的并集. 取一点 $x_0\in U_0$, 一点 $x_1\in U_1$, 即然设 (b) 成立, 存在着一条道路 $\varphi:[0,1]\to U$, 使得 $\varphi(0)=x_0,\varphi(1)=x_1$. 集 $\varphi^{-1}(U_0)$ 及 $\varphi^{-1}(U_1)$ 是线段 $[0,1]$ 上的两个不相交的非空开集, 而它们的并集就是这一线段. 于是线段 $[0,1]$ 不应当是连通的. 这是错误的, 因为一般拓扑中证明了数轴 $\mathbb{R}$ 上任何线段是连通的.

(a)⇒(c) 的证明: 可设 U 不是空集 (否则 (a), (b) 及 (c) 成立是平凡的). 于是选取 $x_0\in U$, 并且设 U 中点可用 U 中的折线与 x_0 联结起来的点构成集 V. 要证明 V 同时是 U 中的开集和闭集. 由此可得: 如果 U 是连通集 (假设 (a)), 那么既然 V 不是空集, 就有 $V=U$. 因此 (a)⇒(c).



V 是 U 中的开集: 设 $a\in V$ 是一条折线 I (在 U 中) 的终点, I 的起点是 x_0 (见图). 有心为 a、半径为 $r>0$ 的一个球 $B(a,r)$ 包含在 U 内. 任何点 $x\in B(a,r)$ 可以用线段与 a 联结起来. 把折线 I 与这线段 "两两相接", 我们得到一条在 U 中的折线, 它的起点是 x_0, 终点是 $x\in B(a,r)$ [自然要调整 I 的原有参数, 例如可使当 t 从 0 递增到 $\frac{1}{2}$ 时, 可描出 I, 而当 t 从 $\frac{1}{2}$ 递增到 1 时, 可描出线段 $[a,x]$]. 于是 a 正好有一邻域, 其中每点可用 U 中折线与 x_0 联结起来. 因此 V 是开集.

V 是 U 中的闭集: 设 $a\in U$ 是附贴于 V 的点, 要证明 $a\in V$. 有一个球 $B(a,r)$ 包含在 U 内; 既然 a 附贴于 V, 就存在着一点 $b\in B(a,r)\bigcap V$. 由于 $b\in V$, 这一点 b 可用 U 中的一条折线与 x_0 联结起来; 又因 a 可用 U 中的一条线段与 b 联结起来, 从而有一条在 U 中的折线, 它的起点是 x_0, 终点是 a, 这就表明了 $a\in V$. 证完.

于是命题 3.3.5 得证.

注意. 在拓扑空间 X 中, 一点 $x_0 \in X$ 的连通分支定义为含 x_0 的最大连通子集 (我们证明在含 x_0 的连通子集中, 有一个包含所有其他连通子集). X 的那些连通子集形成 X 的一个划分. 在这里, 对于赋范 e.v. 中的开集 $U, x_0 \in U$ 的连通分支 V 是这样的点构成的集, 其中任一点可用含在 U 中的折线与 x_0 联结起来, 正如从命题 3.3.5 推得. 在这命题证明中最后部分, 实际上证明了 V 是开集. 于是如果 U 是赋范 e.v. 中的一个开集, 那么 U的连通分支都是开集.

3.4. 有限增量定理续论

设 E 是一赋范 e.v. 我们知道起点 a、终点 b 的线段的长度是

$$d(a,b) = \|b-a\|.$$

作为定义, 一条折线的长度是组成这折线的各线段长度之和; 因此这长度至少等于从起点 a 到终点 b 的距离 $\|b-a\|$.

定义. 设 U 是巴拿赫空间 E 中一个连通开集. 对于 a 及 $b \in U$, 考虑 U 中包含的起点 a、终点 b 的所有折线; 把这些折线长度的下确界记作 $d_U(a,b)$. 因为由命题 3.3.5, 这样的折线存在, 所以上述定义是合理的. 我们有

$$\begin{cases} d_U(a,b) = d_U(b,a), \\ d_U(a,c) \leqslant d_U(a,b) + d_U(b,c) \end{cases}$$

(上式作为习题证明). 换句话说, $d_U(a,b)$ 是拓扑空间 U 中的一个距离.

习题. 证明这一距离在 U 上与距离 $\|a-b\|$ 确定同一拓扑. 为此, 请注意: 如果给出 a, 只要 b 与 a 充分接近, 就有 $d_U(a,b) = \|a-b\|$.

命题 3.4.1. 设 U 是巴拿赫空间 E 中一个连通开集. 设 $f: U \to F$ 是在巴拿赫空间 F 中取值的一个可微映射. 假定对任何 $x \in U$,

$$\|f'(x)\| \leqslant k.$$

那么对任何 x_1 及 $x_2 \in U$, 我们有 $\|f(x_2) - f(x_1)\| \leqslant k \cdot d_U(x_1, x_2)$. (把这里的叙述与定理 3.3.2 的叙述比较一下.) 命题 3.4.1 的证留给读者作为习题.

3.5. 习题

(1) (易证). 设 U 是巴拿赫空间 E 中的一个连通开集; 设 $f: U \to F$ 是在巴拿赫空间 F 中取值的一个可微映射. 证明: 如果映射 $f': U \to \mathscr{L}(E;F)$ 是常量, 那么 f 是一个常量与一个 (连续) 线性 f 在 U 的限制之和.

(2) 设 f 是从闭区间 $[a,b]$ 到巴拿赫空间 F 中的一个连续映射. 令 $g(x) = \|f(x)\|$. 如果 f 在点 $x \in [a,b[$ 右可导, 那么 g 在这点也右可导, 并且

$$|g'_{\mathrm{d}}(x)| \leqslant \|f'_{\mathrm{d}}(x)\|.$$

(应用范数的凸性, 以及本章末习题 6.) 用一个简单的例子证明: f 可导时, g 不必然可导.

(3) 设 f 是从线段 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 到巴拿赫空间 F 中的一个连续映射, 并且在任何点 $x\in]a,b[$ 有右导出映射. 设 C 是 F 的一个凸闭子集, 并且对于任何 $x\in]a,b[, f'_{\mathrm{d}}(x)\in C$. 证明

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\in C.$$

[仿照定理 3.1.2 的证明中步骤, 作出证明. 证明对于 $a<u<v<b$ 及任何 $\varepsilon>0$, 集

$$U_\varepsilon=\{x\in[u,v];\frac{f(x)-f(u)}{x-u}\notin C_\varepsilon\}$$

是空集; C_ε 表示 F 的元素中满足 $d(y,c)\leqslant\varepsilon$ 的 y 所构成的集 (可证明 C_ε 是凸闭集).]

3.6. 有限增量定理的第一种应用: 可微映射序列的收敛性

定理 3.6.1. 设 U 是巴拿赫空间 E 中的一个凸开集, 并且设

$$f_n: U\to F \quad (F\text{: 巴拿赫空间})$$

是一可微映射序列. 作出下列假设:

(i) 存在着一点 $a\in U$, 使得序列 $f_n(a)\in F$ 有极限;

(ii) 映射 $f'_n: U\to\mathscr{L}(E;F)$ 所成序列在 U 中一致收敛于 $g: U\to\mathscr{L}(E;F)$.

那么对于每个 $x\in U$, 序列 $f_n(x)\in F$ 有极限 (记作 $f(x)$); 在 U 的每个有界子集上, 序列 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f; 最后, 极限函数 f 是可微的, 并且它的导函数 $f'(x)$ 就是 $g(x)$.

证. 由定理 3.3.2 (因已设 U 是凸集, 所以可以应用这定理), 我们有

$$\|f_p(x)-f_p(a)-(f_q(x)-f_q(a))\|\leqslant\|x-a\|\cdot\sup_{y\in U}\|f'_p(y)-f'_q(y)\|. \tag{3.6.1}$$

由假设 (ii), 当 p 及 q 无限增大时, 上式右边趋近于 0; 而且只要 $\|x-a\|$ 有界, 即 x 总在 U 的一个有界子集内, 上述收敛性对 x 是一致的. 因此当 $p\to\infty, q\to\infty$ 时, (3.6.1) 的左边趋近于 0, 而且当 x 总在 U 中一个有界子集内时, 这一收敛性是一致的. 其次, 由 (i), $f_p(a)-f_q(a)$ 趋近于 0. 因此在 U 中任何有界子集内, $\|f_p(x)-f_q(x)\|$ 对于 x 一致趋近于 0. 设 f 是极限映射; U 中每点有一有界邻域, 在其中 f 是连续映射 f_n 的序列的一致极限, 因此 f 在 U 中每点的邻域内连续; 这简单地表明了 f 在 U 内连续. 还要证明 f 可微, 并且 $f'(x)=g(x)$. 取定 $x_0\in U$, 只须证明

$$\|f(x)-f(x_0)-g(x_0)\cdot(x-x_0)\|=o(\|x-x_0\|). \tag{3.6.2}$$

不过显然有

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(x_0)-g(x_0)\cdot(x-x_0)\|\leqslant&\|f(x)-f(x_0)-(f_n(x)-f_n(x_0))\|\\&+\|f_n(x)-f_n(x_0)-f'_n(x_0)\cdot(x-x_0)\|\\&+\|f'_n(x_0)\cdot(x-x_0)-g(x_0)\cdot(x-x_0)\|.\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

给出 $\varepsilon > 0$. 可以加大 (3.6.3) 右边三项中的第一项. 由 (3.6.1), 只要 p 及 $n \geqslant n_0$ (依赖于 ε 的适当整数), 就有

$$\|f_p(x) - f_p(x_0) - (f_n(x) - f_n(x_0))\| \leqslant \varepsilon\|x - x_0\|;$$

因此取 $p \to \infty$ 时的极限, 得到: 对于 $n \geqslant n_0$,

$$\|f(x) - f(x_0) - (f_n(x) - f_n(x_0))\| \leqslant \varepsilon\|x - x_0\|, \tag{3.6.4}$$

另一方面, 取极限得: 对于 $n \geqslant n_0$,

$$\|f_n'(x_0) - g(x_0)\| \leqslant \varepsilon,$$

从而对于 $n \geqslant n_0$,

$$\|f_n'(x_0) \cdot (x - x_0) - g(x_0) \cdot (x - x_0)\| \leqslant \varepsilon\|x - x_0\|. \tag{3.6.5}$$

于是对于 $n \geqslant n_0$, (3.6.3) 右边第一项及第三项都不超过 $\varepsilon\|x - x_0\|$. 然后取定 n (例如取 $n = n_0$); 只要 $\|x - x_0\| \leqslant h$ 充分小, 由导出元素 $f_n'(x_0)$ 的定义本身, 就得到

$$\|f_n(x) - f_n(x_0) - f_n'(x_0)(x - x_0)\| \leqslant \varepsilon\|x - x_0\|;$$

这样就加大了 (3.6.3) 右边的第二项. 总计, 由 (3.6.3) 得到: 只要 $\|x - x_0\| \leqslant h$,

$$\|f(x) - f(x_0) - g(x_0) \cdot (x - x_0)\| \leqslant 3\varepsilon\|x - x_0\|.$$

对任何 $\varepsilon > 0$, 存在着这样的 $h > 0$. 这正好表出了 (3.6.2).

注意. 如果 $E = \mathbb{R}$, 定理 3.6.1 可推广到*右导数*.

我们可以解除定理 3.6.1 中对 U 所作关于凸性的假设.

定理 3.6.2. 设 U 是巴拿赫空间 E 中一个连通开集, 并且设

$$f_n : U \to F \quad (F\text{: 巴拿赫空间})$$

是一可微映射序列. 作假设如下:

(i) 存在着一点 $a \in U$, 序列使得 $f_n(a) \in F$ 有极限;

(ii) 对于任何 $x_0 \in U$, 存在着心为 x_0 的一个球, 在其中序列 $\{f_n'\}$ 一致收敛.

那么对于每点 $x \in U$, 序列 $f_n(x) \in F$ 有极限 (记作 $f(x)$); *U 中任何点有一邻域, 在其中序列 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f; 最后, f 在 U 中可微, 并且对于任何 $x \in U, f'(x) = g(x)$.*

这定理是从定理 3.6.1 容易作出的推论. 详细证明留给读者作出. 证明步骤是这样的: 1) U 中使得 $\{f_n(x)\}$ 有极限的所有点构成的集是 U 中的开集及闭集 (应用定理 3.6.1); 2) 如果 $x_0 \in U$, 并且如果 $B(x_0, r)$ 是一个球, 在其中序列 $\{f_n'\}$ 一致收敛, 那么序列 $\{f_n\}$ 也在 $B(x_0, r)$ 中一致收敛于 f (还是应用定理 3.6.1); 3) 再把定理 3.6.1 应用于 U 中适当的球, 可导出 $f'(x) = g(x)$.

3.7. 有限增量定理的第二种应用: 偏可微性与可微性之间的关系

设 $E_1,\cdots,E_n,F$ 是巴拿赫空间, 并且设 $E=E_1\times\cdots\times E_n$. 设 U 是 E 中的开集, 并且设 $f:U\to F$ 是一连续映射. 关于偏导出映射, 请参看 2.6 段.

定理 3.7.1. *采用前面的记号, 要使 f 属于 C^1 类, 必须而且只须 f 有偏导出映射 $\partial f/\partial x_i$, 并且映射*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}:U\to\mathscr{L}(E;F)$$

是连续的 $(i=1,2,\cdots,n)$.

由命题 2.6.1 及 2.6.2, 上述条件是必要的. 只须证明这条件是充分的. 因此假定对任何 $a\in U$, 偏导出映射 $(\partial f/\partial x_i)(a)\in\mathscr{L}(E_i;F)$ 存在, 并且映射 $\partial f/\partial x_i:U\to\mathscr{L}(E_i;F)$ 是连续的. 要证明 f 属于 C^1 类. 先要证明: 对任何 a, $f'(a)$ 存在 (即 f 在点 a 可微): 证明了这一点, 证明就完了, 因为这样命题 2.6.2 表明映射 $f':U\to\mathscr{L}(E;F)$ 是连续的.

总之, 只要证明下列命题:

命题 3.7.2. 如果偏导出映射 $(\partial f/\partial x_i)(x)$ 在任何点 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in U$ 存在, 并且如果映射 $\partial f/\partial x_i:U\to\mathscr{L}(E;F)$ 在点 a *是连续的, 那么 f 在点 a 可微.*

证明主要要应用有限增量定理. 要证明

$$\left\|f(x_1,\cdots,x_n)-f(a_1,\cdots,a_n)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot(x_i-a_i)\right\|$$

是 $o(\|x-a\|)$, 即 $o(\|x_1-a_1\|+\cdots+\|x_n-a_n\|)$, 这是由巴拿赫空间之积的范数定义. 然而我们有明显的恒等式

$$\begin{aligned}
&f(x_1,\cdots,x_n)-f(a_1,\cdots,a_n)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot(x_i-a_i)\\
=&f(x_1x_2,\cdots,x_n)-f(a_1,x_2,\cdots,x_n)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot(x_1-a_1)\\
&+f(a_1,x_2,\cdots,x_n)-f(a_1,a_2,\cdots,x_n)-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot(x_2-a_2)\\
&+\cdots+f(a_1,\cdots,a_{n-1},x_n)-f(a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot(x_n-a_n).
\end{aligned}$$

因此只须证明: 给出 $\varepsilon>0$, 存在着 $\eta>0$, 使得由不等式

$$\|x_1-a_1\|<\eta,\cdots,\|x_n-a_n\|<\eta \tag{3.7.1}$$

可导出

$$\begin{cases}\left\|f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(a_1,x_2,\cdots,x_n)-\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot(x_1-a_1)\right\|\leqslant\varepsilon\|x_1-a_1\|.\\ \left\|f(a_1,x_2,\cdots,x_n)-f(a_1,a_2,\cdots,x_n)-\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot(x_2-a_2)\right\|\leqslant\varepsilon\|x_2-a_2\|,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left\|f(a_1,\cdots,a_{n-1},x_n)-f(a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)-\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot(x_n-a_n)\right\|\leqslant\varepsilon\|x_n-a_n\|.\end{cases}\tag{3.7.2}$$

例如, 已给 ε, 证明可选取 $\eta>0$, 使得由 (3.7.1) 可导出 (3.7.2) 中第一个不等式; 其它不等式可类似地作出证明. 这样考察 (3.7.2) 中 n 个不等式, 对每一个选取一个 η, 然后找出对 (3.7.2) 中 n 个不等式都适用的 (最小的) η. 考察 (3.7.2) 中第一个不等式的左边. 设 ξ_1 是一变量 (空间 E_1 中与 a_1 充分接近的元素); 令

$$g(\xi_1)=f(\xi_1,x_2,\cdots,x_n)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot(\xi_1-a_1).$$

我们要加大 $\|g(x_1)-g(a)\|$. 而由假设, g 有导出映射, 即

$$g'(\xi_1)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2,\cdots,x_n)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,\cdots,a_n).$$

因 $(\partial f/\partial x_1)(x)$ 是 x 的映射, 并且在点 a 连续 (由假设!), 所以存在着 $\eta>0$, 使得由不等式 (3.7.1) 可导出

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\right\|\leqslant\varepsilon.$$

如果上式成立, 并且如果 $\xi_1=(1-t)a_1+tx_1$ 是起点为 a_1、终点为 x_1 的线段 (在向量空间 E_1 内) 上一点, 我们也有

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1,x_2,\cdots,x_n)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\right\|\leqslant\varepsilon,$$

因为 $\|\xi_1-a_1\|\leqslant\|x_1-a_1\|\leqslant\eta$. 由命题 3.3.1, 于是得到

$$\|g(x_1)-g(a_1)\|\leqslant\varepsilon\|x_1-a_1\|.$$

这恰好是我们要证明的. 命题 3.7.2 得证.

注意. 特别是当 $E_1=\mathbb{R},\cdots,E_n=\mathbb{R}$, 从而 $E=\mathbb{R}^n$ 时, 可应用命题 3.7.2 及定理 3.7.1. 这时 $\partial f/\partial x_i$ 是一些映射 $U\to F$.

3.8. 有限增量定理的第三种应用: 严格可微映射概念

在下面, U 表示巴拿赫空间 E 中的一个开集, F 表示一个巴拿赫空间; 考虑从 U 到 F 的一些映射.

定义. 设有 $f: U \to F$. 如果下列条件成立:

(i) $f(a) = 0, a \in U$;

(ii) 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在着 $r > 0$, 使得在球 $\|x - a\| \leqslant r$ 上, f 是 $\varepsilon-$ 李普希茨的,

那么就说 f 在点 a 与零严格相切.

如果定义中条件成立, 那么特别对于 $\|x - a\| \leqslant r$,

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f(a)\| \leqslant \varepsilon \|x - a\|,$$

从而 f 在点 a 与零相切. (参看 2.1 段中所给定义.) 于是从 "f 与零严格相切" 可导出 "f 与零相切", 这表明这里采用的名词是合适的.

定义. 设有 $f_1: U \to F$ 及 $f_2: U \to F$. 如果 $f_1 - f_2$ 在点 $a \in U$ 与 O 严格相切, 就说 f_1 与 f_2 在点 a 严格相切. 证明 (作为习题!) 这样就得到映射 $U \to F$ 之间的一种等价关系.

定义. 设有 $f: U \to F$. 如果有一连续线性映射 $g: E \to F$, 使得映射

$$x \mapsto f(x) - f(a) \quad 与 \quad x \mapsto g(x - a)$$

在点 a 严格相切, 就说 f 在点 a 严格可微.

如果定义中条件成立, 上列两映射更是相切; 因此 f 在点 a 可微, 并且 g 等于导出映射 $f'(a)$. 于是:

要使 f 在点 a 严格可微, 必须而且只须 f 在点 a 可微, 并且对任何 $\varepsilon > 0$, 存在着 $r > 0$, 使得映射

$$x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a) = g(x)$$

在球 $\|x - a\| \leqslant r$ 上是 $\varepsilon-$ 李普希茨的. 说明: 这表明

$$\begin{cases} f(x) - f(y) = f'(a) \cdot (x - y) + \|x - y\| \cdot \psi(x, y), \\ 其中 \ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to a}} \|\psi(x, y)\| = 0. \end{cases} \tag{3.8.1}$$

定理 3.8.1. *如果 $f: U \to F$ 在 U 内可微, 并且如果映射 $f': U \to \mathscr{L}(E; F)$ 在点 a 连续, 那么 f 在点 a 严格可微.*

严格可微性的这一判别法可用有限增量定理证明. 事实上, 令

$$g(x) = f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a).$$

g 可微, 并且我们有

$$g'(x) = f'(x) - f'(a),$$

因此由假设, $\lim\limits_{x\to a} g'(x)=0$. 已给 $\varepsilon>0$, 存在着 $r>0$, 使得对于 $\|x-a\|\leqslant r$,

$$\|g'(x)\|\leqslant\varepsilon.$$

由有限增量定理 (采用定理 3.3.2 的形式), 我们推断出: 在球 $\|x-a\|\leqslant r$ 上, g 是 ε–李普希茨的. 证完.

4. C^1 类映射的局部反演. 隐映射定理

4.1. C^1 类的微分同胚

定义. 设 E 及 F 是两个巴拿赫空间, V 是 E 中一个开集, W 是 F 中一个开集. 设有 $f:V\to W$, 如果 f 是一个 C^1 类的双射 (f 看作从 V 到 F 的映射), 并且如果逆映射 $g=f^{-1}:W\to V$ 还是属于 C^1 类 (看作从 W 到 E 的映射), 那么就说 f 是一个 C^1 类的微分同胚 (或一个 C^1 微分同胚).

不要犯的错误: 一个 C^1 类映射 $f:V\to W$ 可能是一个同胚, 而不是一个 C^1 类微分同胚; 换句话说, 逆同胚 $f^{-1}:W\to V$ 不一定属于 C^1 类. 例如单实变量 x 的函数:

$$y=x^3=f(x)$$

确定从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 上的一个同胚; 它属于 C^1 类, 可是逆映射

$$x=y^{\frac{1}{3}}=g(y)$$

在原点不可微; 事实上, 导函数 $f'(x)$ 是 $3x^2$, 它在 $x=0$ 时为零; 如果 $g'(0)$ 要是存在, 就会有 $g'(0)f'(0)=1$ (复合映射的导出映射), 这是荒谬的. 一般地有:

命题 4.1.1. *设 $f:V\to W$ 是一个 C^1 类的同胚 (V 表示巴拿赫空间 E 中的一个开集, W 表示巴拿赫空间 F 中的一个开集). 要使 f 是一个 C^1 类微分同胚, 必须而且只须对于任何 $x\in V, f'(x)$ 属于 $\mathrm{Isom}(E;F)$.*

先证明一个引理:

引理. 设 $f:V\to W$ 是一个同胚; 假定 f 在一点 $a\in V$ 可微. 要使 $g=f^{-1}$ 在点 $b=f(a)\in W$ 可微, 必须而且只须 $f'(a)\in\mathrm{Isom}(E;F)$, 并且这时

$$g'(b)=(f'(a))^{-1}.$$

条件是必要的; 因为如果 g 在点 b 可微, 那么由关于复合映射的导出映射的定理, 就可得到

$$g'(b)\circ f'(a)=1_E,\quad f'(a)\circ g'(b)=1_F.$$

这样就证明了 $f'(a)$ 是从 E 到 F 上的一个同构, 并且 $g'(b)$ 是逆同构. 现在证明条件是充分的: 假定 $f'(a) \in \text{Isom}(E;F)$, 要证明 g 在点 b 可微. 既然 f 在点 a 可微, 对于接近 a 的 x, 令 $y = f(x)$, 就有

$$y - b = f'(a) \cdot (x - a) + \|x - a\| \cdot \varphi(x - a), \tag{4.1.1}$$

而且

$$\lim_{x \to a} \varphi(x - a) = 0.$$

对 (4.1.1) 两边作线性变换 $(f'(a))^{-1}$:

$$x - a = (f'(a))^{-1} \cdot (y - b) - \|x - a\|(f'(a))^{-1} \cdot \varphi(x - a); \tag{4.1.2}$$

于是回到证明

$$\|x - a\|(f'(a))^{-1} \cdot \varphi(x - a) = o(\|y - b\|).$$

为了简化起见, 令

$$(f'(a))^{-1} \cdot \varphi(x - a) = \psi(x - a).$$

既然 $(f'(a))^{-1}$ 是从 F 到 E 的一个连续线性映射, 当 x 趋近于 a 时, $\psi(x - a)$ 趋近于 0. 由关系式 (4.1.2) 得

$$\|(f'(a))^{-1} \cdot (y - b)\| \geqslant \|x - a\|(1 - \|\psi(x - a)\|),$$

从而 (只要 $\|x - a\|$ 充分小, 以致 $\|\psi(x - a)\| < 1$),

$$\|x - a\| \leqslant \|y - b\| \cdot \frac{\|(f'(a))^{-1}\|}{1 - \|\psi(x - a)\|}.$$

由此得

$$\begin{aligned}\|x - a\| \cdot \|\psi(x - a)\| &\leqslant \|y - b\| \cdot \|(f'(a))^{-1}\| \cdot \frac{\|\psi(x - a)\|}{1 - \|\psi(x - a)\|} \\ &= o(\|y - b\|).\end{aligned}$$

证完.

证明了这引理后, 再来证明命题 4.1.1. 命题所叙述的条件显然是必要的. 反过来, 如果对于任何 $x \in V, f'(x) \in \text{Isom}(E;F)$, 由引理得: 在任何点 $y \in W, g$ 可微, 并且

$$g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}. \tag{4.1.3}$$

还只须证明 g 属于 C^1 类, 这就是说, 映射

$$g' : W \to \mathscr{L}(F;E)$$

连续. 然而 (4.1.3) 表明这一映射是下列三个映射的复合:

1) 从 W 到 V 的映射 $y \mapsto g(y)$: 它是连续的, 由于 f 是同胚;

2) 从 V 到 $\mathrm{Isom}(E;F)$ 的映射 $x \mapsto f'(x)$: 它是连续的, 由于已设 f 属于 C^1 类;

3) 从 $\mathrm{Isom}(E;F)$ 到 $\mathscr{L}(F;E)$ 的映射 $u \mapsto u^{-1}$: 它也是连续的 (定理 1.7.3).

这样就完成了证明.

4.2. 局部反演定理

直到现在为止, 假设了 $f: V \to W$ 是一同胚. 现在要去掉这一假设. 基本定理如下:

定理 4.2.1. *设 U 是巴拿赫空间 E 中的一个开集, 并且 $f: U \to F$ 是一个 C^1 类的映射 (F 是一个巴拿赫空间). 假定在一点 $a \in U$, 我们有*

$$f'(a) \in \mathrm{Isom}(E;F).$$

那么存在着 a 的一个开邻域 $V(V \subset U)$ 以及 $b = f(a)$ 的一个开邻域 W, 使得 f 是从 V 到 W 上的微分同胚.

证明这定理要一些时间 (看以下 4.3, 4.4 及 4.5 段). 在证明这定理前, 先从它导出一个:

系 4.2.2. *要使 C^1 类的 $f: U \to F$ 是从 U 到 F 的一个开集上的 C^1 微分同胚, 必须而且只须*

(i) f 是单射;

(ii) 对于任何 $x \in U, f'(x) \in \mathrm{Isom}(E;F)$.

系的证明. 上述两条件显然是必要的. 反过来说, 假定它们成立; 由条件 (ii) 可导出 $f: U \to F$ 是一开映射 (即对于任何开集 $V \subset U$, 像 $f(V)$ 是 F 中的开集); 事实上, 这可由定理 4.2.1 得到, 这定理表明: 如果 $a \in U$, 那么 a 的任何开邻域通过 f 得出的像包含 $f(a)$ 的一个开邻域. 特别, $f(U)$ 是 F 中的开集. 如果我们证明了 f 是从 U 到 $f(U)$ 上的一个同胚, 那么由命题 4.1.1 可知: f 是从 U 到 $f(U)$ 上的一个微分同胚, 而由 (i), f 是从 U 到 $f(U)$ 上的一个双射; 这个双射同时是连续映射和开映射; 由于 f 是开映射, $g = f^{-1}: f(U) \to U$ 是连续映射, 从而 f 正好是从 U 到 $f(U)$ 上的一个同胚. 证完.

4.3. 局部反演定理的证明: 第一步化简

我们在定理 4.2.1 (问题是要证明这一定理) 的假设下进行讨论. 由于 f 属于 C^1 类, f 在点 a 严格可微 (参看定理 3.8.1). 现暂承认下列命题:

命题 4.3.1. *设 U 是巴拿赫空间 E 中的开集, 并且设 $f: U \to F$ 是连续映射 (F 是巴拿赫空间). 假定 f 在点 a 严格可微, 并且 $f'(a) \in \mathrm{Isom}(E;F)$. 那么存在着点 a 的一个开邻域 $V'(V' \subset U)$ 以及 $b = f(a)$ 的一个开邻域 W', 使得 f 是从 V' 到 W' 上的一个同胚. 而且逆同胚在点 $f(a)$ 严格可微.*

承认了这一命题, 可见在定理 4.2.1 的假设下, 对于任何 $x \in V', f'(x)$ 存在; 而且存在着 a 的一个开邻域 $V(V \subset V')$, 使得 $f'(x) \in \mathrm{Isom}(E;F)$; 这是因为 $\mathrm{Isom}(E;F)$ 是 $\mathscr{L}(E;F)$ 中的开集 (参看定理 1.7.3), 它通过连续映射 f' 的逆像是 V' 中的一个开集, 其中包含 a. 设 $W = f(V); W$ 是 W' 中的开集, 这是因为 f 是从 V' 到 W' 上的一个同胚 (根据我们暂时承认的命题 4.3.1); 而且 f 是从 V 到 W 上的一个同胚. 这时我们是在应用命题 4.1.1 的条件下, 由这命题可见 f 是从 V 到 W 上的一个 C^1 微分同胚. 于是在认可命题 4.3.1 时, 证明了定理 4.2.1.

4.4. 命题 4.3.1 的证明

我们在命题 4.3.1 的假设下进行讨论. 连续线性映射 $(f'(a))^{-1}$ 把 F 映射到 E 上: 考虑复合映射

$$f_1 = (f'(a))^{-1} \circ f : U \to E$$

(已知 U 是 E 中一个开集). 容易证明: f_1 在点 $a \in U$ 是严格可微的, 并且 $f_1'(a) = 1_E$ [习题: 证明这一结果]. 既然 f_1 是严格可微的, 对于每个 $k > 0$, 可找到一个 $r > 0$, 使得映射 $x \mapsto x - f_1(x) = \varphi(x)$ 在球 $\|x - a\| \leqslant r$ 中是 k- 李普希茨的. 一旦选取了 k, 使得 $0 < k < 1$, 就决定了一个 $r > 0$. 因此在球 $\|x - a\| \leqslant r$ 中, 映射 φ 是压缩的, 于是可以应用 "数学一" 课程①中所讲述的逐步逼近理论. 下面要确切提出 (并证明) 这里需要的结果, 由这结果可导出: 存在着 a 的一个开邻域 V (包含在球 $\|x-a\| \leqslant r$ 中), 使得 f_1 是从 V 到 $b_1 = f_1(a)$ 的一个开邻域 W_1 上的一个同胚. 由于 $f'(a)$ 是从 E 到 F 上的一个同胚, 可以看出

$$f = f'(a) \circ f_1$$

是从 V 到 W (W_1 通过 $f'(a)$ 变换而得) 的一个同胚,W 是 F 中含 $b = f(a)$ 的一个开集. 因此命题 4.3.1 得证 (只是上述 V' 及 W' 在证明中称为 V 及 W).

以下是已承认的准确结果, 由它可导出命题 4.3.1:

定理 4.4.1. 设 $B(a, r)$ 是巴拿赫空间 E 中的开球 $\|x - a\| < r$, 并且设

$$f : B(a, r) \to E$$

是一连续映射, 使得映射

$$x \mapsto x - f(x) = \varphi(x)$$

是压缩的 (也就是 k- 李普希茨的, 其中 $k < 1$). 设 $f(a) = b$. 那么存在着含 a、并且包含在 $B(a, r)$ 内的一个开集 V, 使得 f 是从 V 到开球 $B(b, (1-k)r)$ 上的一个同胚; 而且逆映射

$$g = f^{-1} : B(b, (1-k)r) \to B(a, r)$$

是 $[1/(1-k)]$- 李普希茨的.

①译者注: 法国数学专业课程, 数学分析是它的一部分.

4.5. 定理 4.4.1 的证明

设 x 及 $x' \in B(a,r)$; 我们有

$$f(x) - f(x') = (x - x') - (\varphi(x) - \varphi(x')).$$

从而

$$\|f(x) - f(x')\| \geqslant \|x - x'\| - \|\varphi(x) - \varphi(x')\|;$$

考虑到 φ 是 $k-$ 李普希茨的, 由此得

$$\|f(x) - f(x')\| \geqslant (1-k) \cdot \|x - x'\|. \tag{4.5.1}$$

引理. 对于任何 $y \in B(b, (1-k)r)$, 存在着一个并且只有一个 x 在 $B(a,r)$ 内, 并满足 $f(x) = y$.

唯一性的证明: 如果有 $f(x) = f(x')$, 不等式 (4.5.1) 表明 $x = x'$.

存在性的证明: 用逐步逼近法作出所求的 x. 就 n 递推作出点列

$$\begin{cases} x_0 = a, \quad x_1 = y + \varphi(x_0), \cdots, \\ x_{n+1} = y + \varphi(x_n), \cdots. \end{cases} \tag{4.5.2}$$

要使这样逐步确定是合理的, 必须逐步保证 $x_n \in B(a,r)$, 这样才能确定 x_{n+1}, 因为 φ 是在 $B(a,r)$ 中确定的. 确切地说, 要就 n 递推证明

$$\|x_n - a\| \leqslant \frac{1-k^n}{1-k}\|y - b\|; \tag{4.5.3}$$

因为由假设, $\|y - b\| < (1-k)r$. 于是正好有 $\|x_n - a\| < r$. 对于 $n = 1$, 我们有

$$x_1 - a = y + \varphi(a) - a = y - \varphi(a) = y - b.$$

因此对于 $n = 1$, (4.5.3) 成立. 假定对于 $n(n \geqslant 1)$, (4.5.3) 成立, 要证明对于 $n+1$ 也是这样; 由 (4.5.2), 我们有

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n+1}),$$

从而

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k\|x_n - x_{n-1}\|$$

并且因此 (由递推得)

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k^n\|x_1 - a\| = k^n\|y - b\| \tag{4.5.4}$$

由这一不等式及 (4.5.3), 可得

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - a\| &\leqslant \|x_n - a\| + \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leqslant \left(\frac{1-k^n}{1-k} + k_n\right) \cdot \|y - b\| = \frac{1-k^{n+1}}{1-k}\|y - b\|, \end{aligned}$$

这样就证了 (4.5.3), 但是 n 换成了 $n+1$. 现在 (4.5.4) 证明了一般项是 $x_{n+1}-x_n$ 的级数正规收敛, 因此序列 (x_n) 是柯西序列. 设 x 是这序列的极限; 在 (4.5.3) 中取极限, 得到

$$\|x-a\| \leqslant \frac{1}{1-k}\|y-b\| \leqslant r,$$

在 (4.5.2) 中取极限, 得到

$$x = y + \varphi(x),$$

即 $y=f(x)$. 于是引理得证.

现引进一个记号: 对于 $y \in B(b,(1-k)r)$, 把满足 $f(x)=y$ 的唯一的 $x \in B(a,r)$ 记作 $g(y)$. 这样就确定了一个映射

$$g : B(b,(1-k)r) \to B(a,r)$$

不等式 (4.5.1) 表明: 如果 y 及 y' 是 $B(b,(1-k)r)$ 中两点, 我们有

$$\|g(y)-g(y')\| \leqslant \frac{1}{1-k}\|y-y'\|.$$

因此映射 g 是 $[1/(1-k)]-$ 李普希茨的; 特别, g 是连续的. 设 $V \subset B(a,r)$ 是映射 g 的像. 我们有

$$V = f^{-1}(B(b,(1-k)r),$$

即一个开集的逆像; 由于 f 是连续的, V 是 $B(a,r)$ 中的开集, 因而是 E 中的开集. 显然映射 $f : V \to B(b,(1-k)r)$ 及

$$g : B(b,(1-k)r) \to V$$

都是双射, 而且互为逆映射; 又由于它们是连续的, 它们都是同胚.

于是定理 4.4.1 得证. 同时*局部反演定理* (定理 4.2.1) 的证明也完成了, 因为我们已把这定理的证明化为命题 4.3.1 的证明, 而命题 4.3.1 的证明又化为定理 4.4.1 的证明.

4.6. 有限维情形下的局部反演定理

在定理 4.2.1 中, 设 $f'(a)$ 是一线性同构 $E \to F$. 因此在定理的假设中, 就蕴含着巴拿赫空间 E 及 F 是同构的. 当 E 及 F 是有限维时, 就蕴含着它们有相同的维数. 因此考虑 $E=\mathbb{R}^n, F=\mathbb{R}^n$ 情形. 映射 $f : U \to F$ 是由开集 U 中 n 个实变量的 n 个数值函数所确定:

$$f_i(x_1,\cdots,x_n) \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

假定这些函数属于 C^1 类. 线性映射 $f'(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ 是由偏导数

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a_1,\cdots,a_n)$$

的矩阵确定的 (i 是行的指标, j 是列的指标). 所谓 $f'(a) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ 等价于说这一矩阵的行列式 $\neq 0$. 这行列式常记作

$$\frac{\partial(f_1, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}(a_1, \cdots, a_n)$$

[涉及的是这行列式在点 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 的值], 我们称它为变换 f 在点 a 的雅可比行列式.

局部反演定理说, 如果在点 a, 这一雅可比行列式 $\neq 0$, 那么存在着含有 a 并包含在 U 中的一个开集 V, 以及含 $b = f(a)$ 的一个开集 W, 使得 f 是从 V 到 W 上的一个 C^1 微分同胚. 逆映射 g 由 W 中 n 个 C^1 类函数 $g_i(y_1, \cdots, y_n)$ 所确定.

4.7. 隐映射定理

考虑下述情形: E, F, G 表示三个巴拿赫空间, U 是 $E \times F$ 中的一个开集, 并且 $f: U \to G$ 是 C^1 类的一个映射; 因此 f 是一个两变量的映射 $f(x, y)$, 其中 $x \in E, y \in F$, 一对变量 (x, y) 总在 U 内.

设 (a, b) 是 U 中一点, 并设

$$f(a, b) = 0.$$

现要研究方程

$$f(x, y) = 0$$

的 "充分接近于" (a, b) 的解. 为此, 作假设如下:

(H) 偏导出映射 $f'_y(a, b) \in \mathscr{L}(F; G)$ 是从 F 到 G 上的同构.

定理 4.7.1. (隐映射定理) 在上述假设下, 在 $E \times F$ 中, 存在着点 (a, b) 的一个开邻域 V 包含在 U 内, 在 E 中, 存在着 a 的一个开邻域 W, 并且存在着一个 C^1 类的映射

$$g: W \to F$$

具有下列性质: 关系式

$$(x, y) \in V, \quad \text{并且 } f(x, y) = 0 \tag{4.7.1}$$

等价于关系式

$$x \in W, \quad \text{并且 } y = g(x). \tag{4.7.2}$$

评论. 在 (a, b) 的邻域 V 中, 方程 $f(x, y) = 0$ 的解由 (4.7.2) 给出; 换句话说, 在 V 中, 方程 $f(x, y) = 0$ 由 $y = g(x)$ 解出, 其中 g 在 W 中属于 C^1 类.

注意. 既然由假设有

$$(a, b) \in V \quad \text{以及} \quad f(a, b) = 0,$$

并且既然 $a \in W$, (4.7.1) 及 (4.7.2) 的等价性表明有 $g(a) = b$.

定理 4.7.1 的证明. 我们要回到局部反演定理 (定理 4.2.1). 为此, 考虑由

$$f_1(x,y) = (x, f(x,y)), (x \in E, y \in F) \tag{4.7.3}$$

所确定的映射

$$f_1 : U \to E \times G.$$

f_1 在 U 中属于 C^1 类, 因为它的两个分量 x 及 $f(x,y)$ 在 U 中属于 C^1 类. 它的导出映射由矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

所确定, 其中 $\alpha \in \mathscr{L}(E;E), \beta \in \mathscr{L}(F;E), \gamma \in \mathscr{L}(E;G), \delta \in \mathscr{L}(F;G)$. 事实上, 计算 f_1 的偏导出映射表明:

$$\alpha = 1_E, \quad \beta = 0,$$
$$\gamma = f'_x(a,b), \quad \delta = f'_y(a,b)$$

于是 $f'_1(a)$ 是从 $E \times F$ 到 $E \times G$ 的线性映射

$$(h,k) \mapsto (h, f'_x(a,b) \cdot h + f'_y(a,b) \cdot k). \tag{4.7.4}$$

由于 $f'_y(a,b) \in \mathrm{Isom}(E;F)$, 显然 (4.7.4) 是一同构 $E \times F \to E \times G$, 它的逆同构是

$$(h', k') \mapsto (h', (f'_y)^{-1} \cdot k' - (f'_y)^{-1} \cdot f'_x \cdot h').$$

因此在点 $(a,b) \in U$ 的邻域内, 能对 f_1 应用局部反演定理. 我们得到:

在 $E \times F$ 内, 存在着 (a,b) 的一个开邻域 V, 它包含在 U 内; 而在 $E \times G$ 内, 存在着 $(a,0) = f_1(a,b)$ 的一个开邻域 W_1, 使得 f_1 是从 V 到 W 上的一个 C^1 微分同胚.

设 g_1 是逆微分同胚: 它有下列形式:

$$g_1(x,z) = (x, g(x,z)), \quad 其中\ x \in E, z \in G,$$

且满足 $(x,z) \in W_1$. 这样确定了一个 C^1 类函数

$$g : W_1 \to F.$$

由于 f_1 及 g_1 是两个互逆的同胚, 可见下列两条件等价:

(i) $(x,y) \in V$, 并且 $f(x,y) = z$;

(ii) $(x,z) \in W_1$, 并且 $g(x,z) = y$.

在这些关系式中, 令 $z = 0$; 条件 (i) 就变成 (4.7.1); 再看条件 (ii) 变成怎样. 如果

把 E 作为 $E\times F$ 的一个子向量空间, 把 $x\in E$ 作为 $(x,0)\in E\times F$, 那么关系式 $(x,0)\in W_1$ 表明 x 属于 W_1 与 E 的交集; 这一交集是 E 中含 a 的开集 W [因为 W_1 含点 $(a,0)$]. 另一方面, 令

$$g(x,0)=g(x);$$

这是开集 W 中 C^1 类的映射. 于是对于 $z=0$, 条件 (ii) 可写成

$$x\in W,\quad 并且\quad y=g(x).$$

这恰好是 (4.7.2); 这样就证明了它与 (4.7.1) 等价. 证完.

在定理 4.7.1 中出现的开集 W 可能不是连通集. 但是它包含一个含 a 的连通开集 W' (例如心为 a 的一个开球). 显然由关系式

$$x\in W'\quad 并且\quad y=g(x)$$

可导出

$$(x,y)\in U\quad 并且\quad f(x,y)=0.$$

于是映射 g 是在 W' 内满足这些条件的唯一连续映射. 确切说明如下:

命题 4.7.2. 设 W' 是 E 中含 a、并包含在 W 内的一个连通开集, 并且设 $h:W'\to F$ 是满足下列性质的一个连续映射:

$$\begin{cases} h(a)=b;\quad 对于任何\ x\in W',(x,h(x))\in U, \\ f(x,h(x))=0. \end{cases}$$

那么在 W' 内, h 恒等于 g.

证明的原则 (证明留作习题): 设 A 是满足 $h(x)=g(x)$ 的 $x(\in W')$ 所构成的集; 注意 $a\in A$, 并且 A 是 W' 中的闭集; 证明 A 是 W' 中的开集. 由 W' 是连通集可得结论.

E,F,G 是有限维的集情形. 于是由定理 4.7.1 中假设可导出 F 及 G 有同样的维数. 因此设 $E=\mathbb{R}^n, F=\mathbb{R}^p, G=\mathbb{R}^p$. 给出一组方程

$$f_i(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_p)=0\quad (1\leqslant i\leqslant p),\tag{4.7.5}$$

其中 f_i 是开集 U 中 C^1 类的函数; 设雅可比行列式

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_p)}{\partial(y_1,\cdots,y_p)}$$

在点 $(a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots,b_p)$ 处 $\neq 0$. 可以断定: 至少当 $(x_1,\cdots,x_n)$ 充分接近于 $(a_1,\cdots,a_n)$, 并且 $(y_1,\cdots,y_p)$ 充分接近于 $(b_1,\cdots,b_p)$ 时, 方程组 (4.7.5) 等价于函数组

$$y_i=g_i(x_1,\cdots,x_n),\quad 1\leqslant i\leqslant p$$

(其中 g_i 属于 C^1 类). 要作准确的表述, 再采用定理 4.7.1 叙述中的 V 及 W.

5. 高阶导出映射

5.1. 二阶导出映射

总是设 E 及 F 是两个巴拿赫空间, U 是 E 中一个开集, 并且 $f: U \to F$ 是一个映射; 设它在 U 中可微. 于是有一导出映射

$$f': U \to \mathscr{L}(E; F),$$

并且可以轮到问它是否可微.

定义. 如果映射 f' 在点 a 可微, 把 f' (在点 a) 的导出映射记作 $f''(a)$, 那么就说 f 在点 a *二次可微*; 我们有

$$f''(a) \in \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(E; F)).$$

注意. 不设 f 在整个 U 中可微; 更一般地, 如果: 1) f 在 a 的一个邻域 V 中可微; 2) 映射 $f': V \to \mathscr{L}(E, F)$ 在点 a 可微, 那么就说 f 在点 $a \in U$ 二次可微.

定义. 如果 f 在 U 中任何点二次可微 (换句话说, f 在 U 内可微, 并且映射 $f': U \to \mathscr{L}(E; F)$ 在 U 内可微), 就说 f 在 U 内二次可微. 如果是这样, 映射 $x \mapsto f''(x)$ 是映射

$$f'': U \to \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(E; F)).$$

定义. 如果在 U 内 f 二次可微, 并且 f'' 连续, 就说 f 在 U 内属于 C^2 类 (或二次连续可微). 等价条件: f' 在 U 内属于 C^1 类.

我们记得 (参看 1.9 段) 已经定义了标准等距映射

$$\mathscr{L}(E; \mathscr{L}(E; F)) \approx \mathscr{L}(E, E; F). \tag{5.1.1}$$

由这一双射, $f''(a)$ 确定 $\mathscr{L}(E, E; F)$ 中的一个元素, 即一个连续双线性映射 $E \times E \to F$. 用不确切的语言, 我们往往说 $f''(a)$ 是 $\mathscr{L}(E, E; F)$ 的一个元素. 如果参照 1.9 段来阐明 (5.1.1), 我们得到 $f''(a)$ 所确定的映射 $E \times E \to F$ 如下:

$$(h, k) \mapsto (f''(a) \cdot h) \cdot k. \tag{5.1.2}$$

现解释上式: h 及 k 表示 E 中两个向量; 由于 $f''(a)$ 是连续线性映射 $E \to \mathscr{L}(E; F)$, $f''(a)$ 在向量 $h \in E$ 上的值是一个元素

$$f''(a) \cdot h \in \mathscr{L}(E; F).$$

于是 $f''(a) \cdot h$ 是一个连续线性映射 $E \to F$; 它在向量 $k \in E$ 上的值记作

$$(f''(a) \cdot h) \cdot k$$

这样就明确了 (5.1.2) 的意义.

定理 5.1.1. 如果 $f: U \to F$ 在点 a 二次可微, 那么二阶导出映射 $f''(a) \in \mathscr{L}(E, F; F)$ 是一个对称双线性映射; 换句话说,

$$(f''(a) \cdot h) \cdot k = (f''(a) \cdot k) \cdot h, \quad \forall h \in E \text{ 及 } \forall k \in E. \tag{5.1.3}$$

证. 引入映射

$$A(h, k) = f(a + h + k) - f(a + h) - f(a + k) + f(a);$$

它显然是对称的: $A(h, k) = A(k, h)$. 假定已证明关系式:

$$\|A(h, k) - (f''(a) \cdot k) \cdot h\| = o((\|h\| + \|k\|)^2). \tag{5.1.4}$$

由此不难得到 (5.1.3). 事实上, 如果在 (5.1.4) 中交换 h 及 k, 就得到

$$\|A(h, k) - (f''(a) \cdot h) \cdot k\| = o((\|h\| + \|k\|)^2);$$

由这一关系式及 (5.1.4) 可导出

$$\|(f''(a) \cdot k) \cdot h - (f''(a) \cdot h) \cdot k\| = o((\|h\| + \|k\|)^2), \tag{5.1.5}$$

这是因为

$$\|(f''(a) \cdot k) \cdot h - (f''(a) \cdot h) \cdot k\| \leqslant \|(f''(a) \cdot k) \cdot h - A(h, k)\| + \|A(h, k) - (f''(a) \cdot h) \cdot k\|.$$

(5.1.5) 表明: 给出 $\varepsilon > 0$, 存在着 $\eta > 0$, 使得

$$\|(f''(a) \cdot k) \cdot h - (f''(a) \cdot h) \cdot k\| < \varepsilon(\|h\| + \|k\|)^2, \tag{5.1.6}$$

只要 $\|h\| + \|k\| \leqslant \eta$. 而对于任何纯量 λ, 我们有

$$\|(f''(a) \cdot \lambda k) \cdot (\lambda h) - (f''(a) \cdot \lambda h) \cdot (\lambda k)\| = |\lambda|^2 \|(f''(a) \cdot k) \cdot h - (f''(a) \cdot h) \cdot k\|.$$

在 E 中任意给出 h 及 k, 总可找到 $\lambda \neq 0$, 使得 $\|\lambda h\| + \|\lambda k\| \leqslant \eta$; 因此由 (5.1.6) [其中 h 及 k 换成 λh 及 λk], 我们有

$$|\lambda|^2 \cdot \|(f''(a) \cdot k) \cdot h - (f''(a) \cdot h) \cdot k\| \leqslant \varepsilon |\lambda|^2 (\|h\| + \|k\|)^2;$$

用 $|\lambda|^2 \neq 0$ 除上式两边, 我们得到: 无论 h 及 k 是 E 中任何向量, 不等式 (5.1.6) 是正确的; 由于 $\varepsilon > 0$ 是任意选取的, 我们断定关系式 (5.1.3) 是正确的; 这样就证明了定理 5.1.1.

这样, 我们看到: 为了证明定理 5.1.1, 只要证明关系式 (5.1.4).

(5.1.4) 的证明. 从下列明显的不等式出发:

$$\begin{aligned}&\|A(h,k)-(f''(a)\cdot k)\cdot h\|\\ \leqslant\ &\|A(h,k)-f'(a+k)\cdot h+f'(a)\cdot h\|\\ &+\|f'(a+k)\cdot h-f'(a)\cdot h-(f''(a)\cdot k)\cdot h\|.\end{aligned}\tag{5.1.7}$$

现加大上式右边中每一数量, 即

$$\|A(h,k)-f'(a+k)\cdot h+f'(a)\cdot h\|\tag{5.1.8}$$

与

$$\|f'(a+k)\cdot h-f'(a)\cdot h-(f''(a)\cdot k)\cdot h\|.\tag{5.1.9}$$

从 (5.1.9) 开始, 我们有

$$\|f'(a+k)\cdot h-f'(a)\cdot h-(f''(a)\cdot k)\cdot h\|\leqslant\|h\|\cdot\|f'(a+k)-f'(a)-f''(a)\cdot k\|$$

由映射 f' 在点 a 的导出映射的定义, 我们有

$$\|f'(a+k)-f'(a)-f''(a)\cdot k\|=o(\|k\|).$$

因此数量 (5.1.9) 是 $\|h\|\cdot o(\|k\|)$, 因而更加是 $\|h\|\cdot o(\|h\|+\|k\|)$.

现在加大 (5.1.8). 考虑辅助映射

$$B(h)=f(a+k+h)-f(a+h)-f'(a+k)\cdot h+f'(a)\cdot h.$$

于是 (5.1.8) 就是 $\|B(h)-B(0)\|$. 由有限增量不等式 (命题 3.3.1), 我们有

$$\|B(h)-B(0)\|\leqslant\|h\|\cdot\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\|B'(th)\|.$$

我们还有

$$B'(h)=f'(a+k+h)-f'(a+h)-f'(a+k)+f'(a),$$

因此 (5.1.8) 不超过

$$\|h\|\cdot\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\|f'(a+k+th)-f'(a+th)-f'(a+k)+f'(a)\|\tag{5.1.10}$$

现在来加大 (5.1.10); 由 $f''(a)$ 的定义, 我们有

$$\begin{cases}f'(a+k+th)=f'(a)+f''(a)\cdot(k+th)+o(\|k+th\|),\\ f'(a+th)=f'(a)+f''(a)\cdot(th)+o(\|th\|),\\ f'(a+k)=f'(a)+f''(a)\cdot k+o(\|k\|).\end{cases}$$

结合以上各式, 就得到

$$\|f'(a+k+th)-f'(a+th)-f'(a+k)+f'(a)\|=o(\|k+th\|)+o(\|th\|)+o(\|k\|).$$

由于对任何 $t\in[0,1]$, $\|k+th\|\leqslant\|k\|+\|h\|$, 并且 $\|th\|\leqslant\|h\|$, 可见表示式 (5.1.10) 有 $o(\|h\|+\|k\|)$ 的形式, 并且从而 (5.1.8) 不超过

$$\|h\|\cdot o(\|h\|+\|k\|).$$

最后, 数量 (5.1.8) 及 (5.1.9) 中每个都是 $\|h\|\cdot o(\|h\|+\|k\|)$; 因此它们的和也是这样. 于是 (5.1.7) 表明

$$\|A(h,k)-(f''(a)\cdot k)\cdot h\|=\|h\|\cdot o(\|h\|+\|k\|).$$

这表示对于任何 $\varepsilon>0$, 存在着 $\eta>0$, 使得有

$$\|A(h,k)-(f''(a)\cdot k)\cdot h\|\leqslant\varepsilon\|h\|\cdot(\|h\|+\|k\|),$$

只要 $\|h\|+\|k\|\leqslant\eta$. 而且由不等式 $\|h\|+\|k\|\leqslant\eta$ 更加可导出

$$\|A(h,k)-(f''(a)\cdot k)\cdot h\|\leqslant\varepsilon(\|h\|+\|k\|)^2,$$

这样就证明了 (5.1.4).

于是定理 5.1.1 的证明完成.

5.2. E 是乘积空间 $E_1\times\cdots\times E_n$ 情形

总是设 U 是 E 中的开集, 并且 $f:U\to F$ 在点 $a\in U$ 二次可微. 这就意含着 (由定义) f 在 a 的一个邻域中任何点可微. 由 (2.6.1), 我们有: 对于 $h_j\in E_j$,

$$f'(x)\cdot(h_1,\cdots,h_n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\cdot h_j. \tag{5.2.1}$$

不对 f, 而对 f' 应用同一公式, 得: 对于 $k_i\in E_i$

$$f''(a)\cdot(k_1,\cdots,k_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a)\cdot k_i. \tag{5.2.2}$$

因此

$$(f''(a)\cdot(k_1,\cdots,k_n))\cdot(h_1,\cdots,h_n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a)\cdot k_i\right)\cdot(h_1,\cdots,h_n). \tag{5.2.3}$$

为了了解上式右边的意义, 必须想到

$$\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a)\in\mathscr{L}(E_i;\mathscr{L}(E;F)),$$

因此

$$\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a)\cdot k_i \in \mathscr{L}(E;F),$$

并且 $\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a)\cdot k_i$ 在向量 $(h_1,\cdots,h_n)\in E$ 上的值是 F 中一元素.

为了计算 $\partial f'/\partial x_i(a)$, 要用到表示 f' 的关系式 (5.2.1); 对 (5.2.1) 求关于 x_i 的导出映射, 得

$$\left(\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a)\cdot k_i\right)\cdot(h_1,\cdots,h_n)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)\cdot k_i\right)\cdot h_j, \tag{5.2.4}$$

把 $\partial/\partial x_i(\partial f/\partial x_j)$ 在点 a 的值记作 $(\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j)(a)$; 这是 $\mathscr{L}(E_i;\mathscr{L}(E_j;F))\approx\mathscr{L}(E_i,E_j;F)$ 中的一个元素. 如果把 (5.2.3) 的右边换成 (5.2.4) 中求得的值, 就可得到:

$$(f''(a)\cdot(k_1,\cdots,k_n))\cdot(h_1,\cdots,h_n)=\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\cdot\partial x_j}(a)\cdot k_i\right)\cdot h_j \tag{5.2.5}$$

这就是用偏导出映射

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\in\mathscr{L}(E_i,E_j;F)$$

表示 $f''(a)\in\mathscr{L}(E,E;F)$ 的基本关系式. 对于二阶导出映射, 它与表示一阶导出映射的 (2.7.1) 式相类似.

现在表明 $f''(a):E\times E\to F$ 是对称双线性映射 (定理 5.1.1). 交换 k_i 及 h_i (对每个 i), 由 (5.2.5) 得

$$\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\cdot k_i\right)\cdot h_j=\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\cdot h_i\right)\cdot k_j$$

或再在上式右边交换求和的指标 i 及 j:

$$\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\cdot k_i\right)\cdot h_j=\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)\cdot h_j\right)\cdot k_i$$

这是对 $k_1,\cdots,k_n,h_1,\cdots,h_n$ 的一个恒等式. 由此对任何一对 (i,j), 有

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\cdot k_i\right)\cdot h_j=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)\cdot h_j\right)\cdot k_i \tag{5.2.6}$$

这就表明了双线性映射

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a):E_j\times E_i\to F$$

是对称映射 $E_j\times E_i\to E_i\times E_j$ [它把 (h_j,k_i) 映射成 (k_i,h_j)] 与双线性映射

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a):E_i\times E_j\to F$$

的复合映射. 可以简单地说, 两个双线性映射 $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(a)$ 及 $(\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i)(a)$ 可由交换变量 $k_i \in E_i$ 及 $h_j \in E_j$ 而相互导出, 特别, $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(a)$ 也可记作 $(\partial^2 f/\partial (x_i)^2)(a)$, 它是一个对称双线性映射 $E_i \times E_i \to F$.

注意. 在上面, 我们先设 $f''(a)$ 存在, 由此导出偏导出映射 $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(a)$ 存在. 然而要使 f 在点 a 二次可导, 有一充分条件; 事实上, 应用命题 3.7.2 两次, 就得到:

命题 5.2.1. 要使 $f''(a)$ 存在, 只须 (i) $\partial f/\partial x_j (j = 1, \cdots, n)$ 在每点 $x \in U$ 存在, 并且是 U 中的连续映射; (ii) 偏导出映射 $\partial/\partial x_i(\partial f/\partial x_j)(i, j = 1, \cdots, n)$ 在任何点 $x \in U$ 存在, 并且是在点 a 连续的映射 [作为映射 $U \to \mathscr{L}(E_i, E_j; F)$].

特殊情形 $E = \mathbb{R}^n$. 在这种情形下, 对于 $i = 1, \cdots, n$, 取 $E_i = \mathbb{R}$. 于是与我们已经常说到的一样, $\mathscr{L}(E_i; F)$ 与 F 看作相同; 并且

$$\mathscr{L}(E_i; \mathscr{L}(E_j; F)) = \mathscr{L}(\mathbb{R}; \mathscr{L}(\mathbb{R}; F))$$

也与 F 看作相同. 用这种看法, 如果把 $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(a)$ 所确定的 F 中的元素 $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(a)$ 暂时记作 c_{ij}, 相应的双线性映射 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to F$ 就是

$$(\lambda_i, \lambda_j) \to \lambda_i \lambda_j c_{ij}.$$

由以下的结果, 我们有: 无论 λ_i 及 λ_j 是怎样,

$$\lambda_i \lambda_j c_{ij} = \lambda_j \lambda_i c_{ji}.$$

由此得 $c_{ij} = c_{ji}$ (例如令 $\lambda_i = 1, \lambda_j = 1$). 这样有:

命题 5.2.2. 如果 $f: U \to F$ 是 n 个实变量的二次可微函数, 我们有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \in F.$$

这是经典的施瓦茨定理; 但它往往是在命题 5.2.1 的假设下叙述的, 而要使 $f''(a)$ 存在, 这些假设是充分的, 但不是必要的.

施瓦茨定理只是表述了 n 个实变量函数在特殊情形下的定理 5.1.1, 而后者是在一般情形成立的.

5.3. 逐阶导出映射

设 $f: U \to F$ 是一个二次可微函数. 于是有 "二阶导出" 映射

$$f'': U \to \mathscr{L}_2(E; F),$$

这里为简单计, 把连续双线性映射 $E \times E \to F$ 所形成的巴拿赫空间 $\mathscr{L}(E, E; F)$ 记作 $\mathscr{L}_2(E; F)$. 一般地, 把连续多重映射

$$\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ 个因子}} \to F$$

的巴拿赫空间记作 $\mathscr{L}_n(E; F)$. 我们可以问映射 f'' 本身是否可微. 如果它在点 $a \in U$ 可微, 把 f'' 在点 a 的导出映射记作 $f'''(a)$, 或 $f^{(3)}(a)$; 它是 $\mathscr{L}(E; \mathscr{L}_2(E; F)) \approx \mathscr{L}_3(E; F)$ 中的一个元素.

就 n 递推, 我们定义 "在点 a, f 是 n 次可微的", 并且说出 n 阶导出映射 $f^{(n)}(a) \in \mathscr{L}_n(E; F)$ 的意义是什么. 假定这些概念已在 $n-1$ 情形有了定义; 如果存在着 a 的一个邻域 V, 使得 f 在 V 中每点 $n-1$ 次可微, 并且如果从 V 到 $\mathscr{L}_{n-1}(E; F)$ 中的映射 $x \mapsto f^{(n-1)}(x)$ 在点 a 可微, 那么就说在 a, f 是 n 次可微的; 这时 $f^{(n-1)}$ 在点 a 的导出映射记作 $f^{(n)}(a)$, 并且称为 f 在点 a 的 n 阶导出映射. 它是 $\mathscr{L}_n(E; F)$ 的一个元素.

对于 $h_1, \cdots, h_n \in E$, 把 $f^{(n)}(a) : E \times \cdots \times E \to F$ 对于元素 $(h_1, \cdots, h_n) \in E \times \cdots \times E$ 的值记作 $f^{(n)}(a) \cdot (h_1, \cdots, h_n)$.

定义. 如果 f 在 U 中任何点 n 次可微, 并且如果映射

$$f^{(n)} : U \to \mathscr{L}_n(E; F)$$

连续, 那么就说 f 在 U 中属于 C^n 类 (或者说 f 在 U 中 n 次连续可微).

这样对于 $n \geqslant 1$ 定义了 $f^{(n)}$ 后 (当这 n 阶导出映射存在时), 约定令

$$f^{(0)} = f \text{ (0 阶导出映射!)}.$$

如果 f 连续, 就说 f 属于 $C^{(0)}$ 类

定义. 如果对于任何 $n, f : U \to F$ 属于 C^n 类, 就说 f 属于 C^∞ 类.

习题. 为此, 只须对于任何 $n, f^{(n)}$ 存在; 在这种情形下, 也说 f 无穷可微.

注意. 要使在点 a, f 是 n 次可微的 $(n \geqslant 1)$, 必须而且只须 $f'(x)$ 在 a 的一个邻域 V 内任何点 x 存在, 并且在点 a 映射 $f' : V \to F (n-1)$ 次可微; 于是

$$f^{(n)}(a) = (f')^{(n-1)}(a).$$

同样, 对于 $n \geqslant 2$, 我们有

$$f^{(n)}(a) = (f'')^{(n-2)}(a), \text{等等}.$$

证明留作习题.

从基本定理 5.1.1, 不难导出:

定理 5.3.1. 如果在点 a, f 是 n 次可微的, 那么 $f^{(n)}(a) \in \mathscr{L}_n(E;F)$ 是一对称多重线性映射 $E \times \cdots \times E \to F$. 换句话说, 如果 $h_1, \cdots, h_n$ 是 E 中 n 个向量, 并且如果 σ 表示 $[1, 2, \cdots, n]$ 上的任一种排列, 那么我们有

$$f^{(n)}(a) \cdot (h_1, h_2, \cdots, h_n) = f^{(n)}(a) \cdot (h_{\sigma(1)}, h_{\sigma(2)}, \cdots, h_{\sigma(n)}). \tag{5.3.1}$$

证. 问题只是在 $n \geqslant 2$ 情形. 对于 $n = 2$, 本定理结论已有证明 (定理 5.1.1). 现用递推法进行证明: 设 $n \geqslant 3$, 并且假定定理已对 $n-1$ 情形证明. 而 $f^{(n)}(a)$ 是映射

$$f^{(n-1)}: V \to \mathscr{L}_{n-1}(E;F)$$

的导出映射; 由假设, $f^{(n-1)}$ 在 a 的一个邻域 V 中存在. 由所作递推假设, $f^{(n-1)}$ 在 $\mathscr{L}_{n-1}(E;F)$ 的子空间中取值. 这一子空间是由对称 $(n-1)$ 重线性映射组成的. 因此对于 $h_1 \in E, f^{(n)}(a) \cdot h_1$ 是这空间中一元素; 换句话说:

$$(f^{(n)}(a) \cdot h_1) \cdot (h_2, \cdots h_n)$$

是 $h_2, \cdots, h_n$ 的对称映射. 这就是

$$f^{(n)}(a) \cdot (h_1, h_2, \cdots, h_n),$$

由此看出多重线性映射 $f^{(n)}(a): E^n \to F$ 是后 $n-1$ 个变量的对称函数. 因此还只要证明: 当置换 h_1 及 h_2 时,

$$f^{(n)}(a) \cdot (h_1, h_2, \cdots, h_n)$$

的值不改变; 事实上, 已知 n 个元素的任何排列可由有限次 "转置" 组成, 每一转置就是要置换相邻接的两个元素. 已经知道: 如果这两元素是 h_i 及 h_{i+1}, 而 $2 \leqslant i \leqslant n-1$, 转置不造成改变; 如果证明了对于 h_1 及 h_2 也是这样, 证明就完成了. 而 $f^{(n)}(a)$ 是 $f^{(n-2)}$ 的二阶导出映射, 于是

$$(f^{(n)}(a) \cdot h_1) \cdot h_2 \in \mathscr{L}_{n-2}(E;F)$$

对 h_1 及 h_2 是对称的; 这是把定理 5.1.1 应用到函数 $f^{(n-2)}$ 就可得到的. 证完.

5.4. n 次可微映射的例子

命题 5.4.1. 任何连续双线性映射

$$\varphi: E_1 \times E_2 \to F$$

属于 C^∞ 类; 更准确地说, φ'' 是一常量映射, 因此对于 $n > 2$, 导出映射 $\varphi^{(n)}$ 为零.

证. 由定理 2.4.3. 我们知道 φ 可微, 并且

$$\varphi(x_1,x_2)\cdot(h_1,h_2)=\varphi(h_1,x_2)+\varphi(x_1,h_2)$$

这一关系式表明映射

$$\varphi':E_1\times E_2\to\mathscr{L}(E_1\times E_2;F)$$

是点 $(x_1,x_2)\in E_1\times E_2$ 的一个连续线性映射. 因此它的导出映射 φ'' 是一常量; 这常量的值是 $\mathscr{L}_2(E_1\times E_2;F)$ 的元素 [这里 $E_1\times E_2$ 是连同它的巴拿赫空间结构取的], 它把

$$\varphi(h_1,x_2)+\varphi(x_1,h_2)$$

与向量空间 $E_1\times E_2$ 的两个元素 (h_1,h_2) 及 (k_1,k_2) 联系着. 证完.

定理 5.4.2. (复合映射的导出映射) *设 $U\subset E$ 及 $V\subset F$ 是两个巴拿赫空间中的两个开集, $f:U\to V$, 并且 $g:V\to G$ 是两个连续映射.*

(i) *如果 f 在点 $a(\in U)n$ 次可微, 并且 g 在点 $b=f(a)(\in V)n$ 次可微, 那么 $h=g\circ f:U\to G$ 在点 a 是 n 次可微的.*

(ii) *如果 f 及 g 属于 C^n 类, 那么 $h=g\circ f$ 属于 C^n 类.*

证. 对于 $n=1$, 定理是正确的. 事实上, 这可由定理 2.2.1 (复合映射的导出映射) 导出; 由这定理得

$$h'(x)=g'(f(x))\circ f'(x), \tag{5.4.1}$$

这公式表明: 如果 f' 及 g' 是连续映射, 那么 h' 也是连续映射 (由此可见, 对于 $n=1$, 结论 (ii) 成立). 就 n 递推, 假设对于 $n-1(n\geqslant 2)$,(i) 及 (ii) 成立, 要证明对于 n, 这两结论成立.

例如对性质 (ii) 情形进行论证; 对于 (i) 的论证完全是类似的. 我们要证明 h 属于 C^n 类, 或者就是要证明 h' 属于 C^{n-1} 类. 而关系式 (5.4.1) 表明 h' 是下列两个映射的复合映射:

1°) 从 U 到 $\mathscr{L}(F;G)\times\mathscr{L}(E;F)$ 的映射 $x\mapsto(g'(f(x)),f'(x))$;

2°) 从 $\mathscr{L}(F;G)\times\mathscr{L}(E;F)$ 到 $\mathscr{L}(E;G)$ 的映射 $(v,u)\mapsto v\circ u$.

第二个映射是连续双线性的 (参看 1.8 段末), 因此属于 C^∞ 类 (命题 5.4.1). 第一个映射在一个乘积空间中取值, 它的两个合成映射是

$$x\mapsto g'(f(x))\quad 及\quad x\mapsto f'(x).$$

由假设, 这两映射中的第二个属于 C^{n-1} 类. 至于第一个, 则是一复合映射

$$U\xrightarrow{f}V\xrightarrow{g'}\mathscr{L}(F;G);$$

f 属于 C^n 类, 并且更是属于 C^{n-1} 类; g' 也属于 c^{n-1} 类. 由递推假设, 复合映射 $g'\circ f$ 属于 C^{n-1} 类. 于是 1°) 中映射属于 C^{n-1} 类. (因为两个合成映射中每一个属

于 C^{n-1} 类); 2°) 中映射也属于 C^{n-1} 类 (而且甚至是属于 C^∞ 类). 由递推假设(第二次用到这一假设), 1°) 中及 2°) 中映射的复合映射属于 C^{n-1} 类. 这一复合映射是 h', 于是得到递推要作的证明.

定理 5.4.3. 设 E 及 F 是两个巴拿赫空间; 把从 E 到 F 上的线性同构所形成的 $\mathscr{L}(E;F)$ 中开集总是记作 $\mathrm{Isom}(E;F)$. 那么满足下列条件的映射 $\varphi : \mathrm{Isom}(E;F) \to \mathscr{L}(F;E)$ 属于 C^∞ 类:

$$\varphi(u) = u^{-1} \in \mathrm{Isom}(E;F).$$

证. 由定理 2.4.4, 已知 φ 属于 C^1 类, 而且

$$\varphi'(u) \cdot h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}, \text{ 其中 } h \in \mathscr{L}(E;F). \tag{5.4.2}$$

$\varphi'(u)$ 是 $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E;F);\mathscr{L}(F;E))$ 中一元素. 如在定理 2.4.4 的证明中一样, 引进连续双线性映射

$$\psi : \mathscr{L}(F;E) \times \mathscr{L}(F;E) \to \mathscr{L}(\mathscr{L}(E;F);\mathscr{L}(F;E)),$$

这里 ψ 是由下式确定的:

$$\psi(v,w) \cdot h = -v \circ h \circ w.$$

于是关系式 (5.4.2) 可写成

$$\varphi'(u) = \psi(\varphi(u), \varphi(u)) \tag{5.4.3}$$

[由于 $u^{-1} = \varphi(u)$]. 这是映射 φ 所满足的一个 "微分方程". 由此就 n 递推, 可导出 φ 属于 C^n 类.

已知上述结论在 $n = 1$ 时正确. 设 $n \geqslant 2$, 并假定已证明 φ 属于 C^{n-1} 类. 由此要证明 φ' 属于 C^{n-1} 类 (即 φ 属于 C^n 类). 而 (5.4.3) 表明: 映射 φ' 是下列两映射的复合映射:

1°) 从 $\mathrm{Isom}(E;F)$ 到 $\mathscr{L}(F;E) \times \mathscr{L}(F;E)$ 的映射 $u \mapsto (\varphi(u), \varphi(u))$;

2°) 双线性映射 ψ.

由递推假设, 上列第一个映射属于 C^{n-1} 类, 并且第二个属于 C^∞ 类 (命题 5.4.1). 因此这两映射的复合映射属于 C^{n-1} 类 (定理 5.4.2). 证完.

习题. 证明给出 φ 的 n 阶导出映射的下列公式:

$$\varphi^{(n)}(u) \cdot (h_1, \cdots, h_n) = (-1)^n \sum_\sigma u^{-1} \circ h_{\sigma(1)} u^{-1} \circ \cdots \circ u^{-1} \circ h_{\sigma(n)} \circ u^{-1},$$

其中和式是对 $[1, \cdots, n]$ 的 $n!$ 个排列 σ 作出的.

定理 5.4.4. 设 E 及 F 是两个巴拿赫空间, 并且设 $V \subset E$ 及 $W \subset F$ 是两个开集. 设

$$f : V \to W$$

是一个 C^1 微分同胚 (参看 4.1 段). 如果映射 f 属于 C^n 类, 那么逆同胚 $g=f^{-1}$ 也属于 C^n 类. [于是我们说 f 是 C^n 微分同胚].

证. 对于 $n=1$, 所述结论是同语反复. 而且我们知道: 对于 $y\in W$,

$$g'(y)=(f'(g(y)))^{-1};\tag{5.4.4}$$

这表明映射 g' 是下列三个映射的复合映射:

— 映射 $g:W\to V$;

— 映射 $f':V\to \operatorname{Isom}(E;F)$;

— 映射 $\operatorname{Isom}(E;F)\to\mathscr{L}(F;E)$, 这映射是由 $u\mapsto u^{-1}$ 确定的.

现就 n 递推证明这定理. 假定定理对 $n-1$ 成立 $(n\geqslant 2)$; 那么在假设下, 上列第二及第三个映射都属于 C^{n-1} 类 (由定理 5.4.3, 第三个映射甚至属于 C^∞ 类). 至于第一个映射就是 g; 由递推假设, 它属于 C^{n-1} 类. 于是作为三个属于 C^{n-1} 类映射的复合映射, 映射 g' 也属于 C^{n-1} 类. 证完.

注意. 如果一个同胚 $f:V\to W$ 属于 C^n 类 $(n\geqslant 1)$ (或属于 C^∞ 类), 并且如果对任何 $x\in V, f'(x)\in\operatorname{Isom}(E;F)$, 那么 f 是 C^n 微分同胚 (或 C^∞ 微分同胚) [对于 $n=1$, 这就是命题 4.1.1; 把这命题与上列定理 5.4.4 联系起来, 就得到所述结果].

系 5.4.5. 在 “局部反演定理” (定理 4.2.1) 中, 如果假定 f 不仅属于 C^1 类, 而且属于 C^n 类, 结论就是: f 在 V 上的限制 [用定理 4.2.1 中的记号] 是从 V 到 W 上的一个 C^n 微分同胚.

同样, 在 “隐映射定理” (定理 4.7.1) 中, 如果假定映射 $(x,y)\mapsto f(x,y)$ 不仅属于 C^1 类, 而且属于 C^n 类, 结论就是 [采用定理 4.7.1 中的记号]: 映射 $g:W\to F$ 属于 C^n 类.

5.5. 泰勒公式: 特别情形

我们从一个初步的公式开始. 设 E,F 及 G 是三个巴拿赫空间, 并且 $\varphi:E\times F\to G$ 是一个连续双线性映射. 另一方面, 设

$$u:U\to E\quad 及\quad v:U\to F$$

是两个 $n+1$ 次可微的映射, 这里 U 表示数轴 $\mathbb{R}$ 上的一个开区间. 逐次导出映射 $u^{(i)},v^{(i)}$ 分别在 E 及 F 中取值.

引理. 在上述假设下, 从 U 到 G 的映射

$$t\mapsto\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\varphi(u^{(p)}(t),v^{(n-p)}(t))$$

有导出映射

$$t\mapsto\varphi(u(t),v^{(n+1)}(t))+(-1)^n\varphi(u^{(n+1)}(t),v(t)).$$

证明留给读者作出: 考虑单数值变量的两个映射以及以这两映射为变量的双线性映射, 并且应用这一双线性映射的导出映射公式 (参看 (2.5.5)).

把这引理应用到下列特别情形: $E=\mathbb{R}, G=F$; 映射 $\varphi: \mathbb{R}\times F\to F$ 是 F 中的向量与纯量之积的映射. 还取

$$u(t)=\frac{1}{n!}(1-t)^n;$$

$u(t)$ 属于 C^n 类, 而且 $u^{(n+1)}(t)=0$. 我们得到:

命题 5.5.1. 如果 v 是单实变数 $t\in U$ 的映射, 在巴拿赫空间 F 中取值, 并且是 $(n+1)$ 次可微的, 那么就有

$$\frac{d}{dt}\left[v(t)+(1-t)v'(t)+\cdots+\frac{1}{n!}(1-t)^n v^{(n)}(t)\right]=\frac{1}{n!}(1-t)^n v^{(n+1)}(t). \qquad (5.5.1)$$

(记号 $(d/dt)f$ 表示单实变数 t 的映射 f 的导出映射).

系 5.5.2. 还假设 $U\supset[0,1]$, 并且 $v^{(n+1)}$ 是连续的, 那么

$$v(1)-v(0)-v'(0)-\frac{1}{2}v''(0)-\cdots-\frac{1}{n!}v^{(n)}(0)=\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}v^{(n+1)}(t)dt. \qquad (5.5.2)$$

事实上, 如果对于 $t\in[0,1], t\mapsto f(t)$ 有一个连续导出映射 f', 我们知道

$$f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(t)dt.$$

[参看 “数学 I 教程”]. 在这里取

$$f(t)=v(t)-(1-t)v'(t)-\cdots-\frac{1}{n!}(1-t)^n v^{(n)}(t), \qquad (5.5.3)$$

并应用上列结果.

系 5.5.3. 在命题 5.5.1 的假设下, 还假定对于 $t\in[0,1]$,

$$\|v^{(n+1)}(t)'\|\leqslant M. \qquad (5.5.4)$$

那么就有

$$\|v(1)-v(0)-v'(0)-\frac{1}{2}v''(0)-\cdots-\frac{1}{n!}v^{(n)}(0)\|\leqslant\frac{M}{(n+1)!} \qquad (5.5.5)$$

证. 应用定理 3.1.1 (有限增量定理), 在这定理中, 把区间 $[a,b]$ 用 $[0,1]$ 来代替, 映射 f 用 (5.5.3) 中的映射来代替, 并且取

$$g(t)=-M\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

由关系式 (5.5.1) 得

$$\|f'(t)\| \leqslant \frac{(1-t)^n}{n!}\|v^{(n+1)}(t)\|;$$

因此由假设 (5.5.4),

$$\|f'(t)\| \leqslant M\frac{(1-t)^n}{n!} = g'(t).$$

由有限增量定理 3.1.1 可得结论:

$$\|f(1) - f(0)\| \leqslant g(1) - g(0);$$

这正好给出要证明的不等式 (5.5.5).

下面要考虑一般情形下的 "泰勒公式", 系 5.5.2 及 5.5.3 只涉及了这公式的两种特殊情形.

5.6. 泰勒公式: 一般情形

今后 U 表示巴拿赫空间 E 中一个开集, 并且 F 是一个巴拿赫空间; 考虑映射

$$f : U \to F.$$

设 a 及 $a+h$ 是 U 中两点, 并且线段 $[a, a+h]$ 包含在 U 内 (例如, 如果 U 是凸集, 只须 a 及 $a+h \in U$, 上述线段就包含在 U 内; 如果 U 是任何开集, 并且 a 是 U 中一点, 那么对于范数充分小的任何向量 $h \in E, a+h \in U$).

考虑映射

$$v(t) = f(a+th), \quad t \in [0,1].$$

如果 f 在 U 内 $n+1$ 次可微, 那么 v 是 $n+1$ 次可微的 (复合映射的可微性), 并且可立即算出 v 的导出映射:

$$v'(t) = f'(a+th)\cdot h,$$
$$v''(t) = (f''(a+th)\cdot h)\cdot h;$$

约定把 $v''(t)$ 记作 $f''(a+th)\cdot(h,h)$ [不要忘记 $f''(a+th)$ 是从 $E\times E$ 到 F 的双线性映射, 而且还是对称的]. 一般地, 对 n 递推可见

$$v^{(n)}(t) = f^{(n)}(a+th)\cdot(\underbrace{h,\cdots,h}_{n\ 个}). \tag{5.6.1}$$

约定把元素 $(h,\cdots,h) \in E^n$ 简记作 $(h)^n$.

在系 5.5.2 及 5.5.3 中, 把 v 及它的导出映射用表达式 (5.6.1) 来代替. 我们得到:

定理 5.6.1. (“带积分余项的泰勒公式”). 设 $f: U \to F$ 是属于 C^{n+1} 类的映射. 如果线段 $[a, a+h]$ 包含在 U 内, 我们有:

$$\boxed{\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)\cdot h + \frac{1}{2}f''(a)\cdot(h,h) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(h)^n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(a+th)\cdot(h)^{n+1}dt \end{aligned}} \tag{5.6.2}$$

定理 5.6.2. (“带拉格朗日余项的泰勒公式”). 设 $f: U \to F$ 是 $n+1$ 次可微的映射; 假定对于 $x \in U$,

$$\|f^{(n+1)}(x)\| \leqslant M. \tag{5.6.3}$$

那么

$$\boxed{\|f(a+h) - f(a) - f'(a)\cdot h - \cdots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\cdot(h)^n\| \leqslant M\frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!}.} \tag{5.6.4}$$

事实上,

$$\|v^{(n+1)}(t)\| = \|f^{(n+1)}(a+th)\cdot(h,\cdots,h)\|;$$

由连续 $(n+1)$ 线性映射的范数的性质 (参看 (1.8.5)), 上式不超过

$$\|f^{(n+1)}(a+th)\|\cdot\|h\|^{n+1},$$

并且由假设 (5.6.3), 这式不超过 $M\cdot\|h\|^{n+1}$. 于是只须应用系 5.5.3 就可完成证明了 (这时系中的 M 要用 $M\|h\|^{n+1}$ 来代替).

这样得到了两个 “泰勒公式”, 由此可导出第三个 “泰勒公式”; 在 (5.6.4) 中, 我们看出: 如果 h 趋近于 0, 这式右边是 $o(\|h\|^n)$, 因而它的左边也是这样, 可是这结果是在设 f 在 a 的邻域内有有界的导出映射 $f^{(n+1)}$ 时得到的. 实际上, 由更宽的假设也可得到这一结果:

定理 5.6.3. 设 $f: U \to F$ 是一个 $n-1$ 次可微映射. 设 f 在点 $a \in U$ 是 n 次可微的. 那么我们有

$$\boxed{\|f(a+h) - f(a) - f'(a)\cdot h - \cdots - \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\cdot(h)^n\| = o(\|h\|^n).} \tag{5.6.5}$$

泰勒公式只表明了一种 “渐近” 性质; 即表明当 h 趋近于零时所发生的情况.

证. 对于 $n=1$, (5.6.5) 只是表明了导出映射 $f'(a)$ 的定义

$$\|f(a+h) - f(a) - f'(a)\cdot h\| = o(\|h\|).$$

现对 n 作递推, 假定 (5.6.5) 对于 $n-1$ 成立 $(n \geqslant 2)$. 考虑映射

$$\varphi(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h - \cdots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (h)^n. \tag{5.6.6}$$

求它的导出映射. 为此, 先求映射 $h \mapsto f^{(n)}(a) \cdot (h)^n$ 的导出映射; 对于 h 的每个值, 此导出映射是 $\mathscr{L}(E;F)$ 的一个元素, 即在 F 中取值的 $k(\in E)$ 的一个线性映射. 因为 $f^{(n)}(a)$ 是 n 重线性映射 $E \times \cdots \times E \to F$, 所以由关系式 (2.4.3), 对于变量的值 $(h, \cdots, h)$, 可得到这映射的导出映射: 它就是线性映射

$$k \mapsto f^{(n)}(a) \cdot (k, h, \cdots, h) + f^{(n)}(a) \cdot (h, k, h, \cdots, h) + \cdots + f^{(n)}(a) \cdot (h, \cdots, h, k).$$

由于 $f^{(n)}(a)$ 是对称映射, 由此得 $k \mapsto n f^{(n)}(a) \cdot (h, \cdots, h, k)$. 这结果可解释如下: 把 $f^{(n)}(a)$ 看作 $f' : U \to \mathscr{L}(E;F)$ 的 $(n-1)$ 阶导出映射: 它是在 $\mathscr{L}(E;F)$ 中取值的对称 $(n-1)$ 线性映射. 把它在多重向量 $(h, \cdots, h)$ 上的值记作

$$f^{(n)}(a) \cdot (\underbrace{h, \cdots, h}_{n-1 \text{ 个 } h}) = f^{(n)}(a) \cdot (h)^{n-1};$$

这是 $\mathscr{L}(E;F)$ 中的一个元素. 那么可看出映射

$$h \mapsto \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (h)^n \ (\text{映射 } E \to F)$$

的导出映射是

$$h \mapsto \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a)(h)^{n-1} \ (\text{映射 } E \to \mathscr{L}(E;F)).$$

有了这些解释, 可见 (5.6.6) 所确定的映射 φ 的导出映射是

$$\varphi'(h) = f'(a+h) - f'(a) - \cdots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a) \cdot (h)^{n-1}$$

应用对映射 f' 所作递推假设; 我们得到:

$$\|\varphi'(h)\| = o(\|h\|^{n-1}).$$

换句话说, 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在着 $\eta > 0$, 使得

$$\text{由 } \|h\| \leqslant \eta \text{ 导出 } \|\varphi'(h)\| \leqslant \varepsilon \|h\|^{n-1}.$$

于是由有限增量的不等式可得:

$$\text{对于 } \|h\| \leqslant \eta, \quad \|\varphi(h) - \varphi(0)\| \leqslant \varepsilon \|h\|^n.$$

而 $\varphi(0) = 0$. 因此有

$$\|\varphi(h)\| = o(\|h\|^n),$$

这正好是要证明的关系式 (5.6.5).

6. 多 项 式

泰勒公式 (参看 5.6) 引进了 $h(\in E)$ 的映射:

$$h \mapsto \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot \underbrace{(h, \cdots, h)}_{n \text{ 个 } h};$$

我们记得 $f^{(n)}(a)$ 是一个对称多重线性映射 $E^n \to F$, 这样可以引向这一一般概念: 从 E 到 F 的 n 次齐次多项式映射.

我们首先详述这问题所具有的纯粹代数形式.

6.1. n 次齐次多项式

在本段及以下几段中, $\mathbb{K}$ 表示特征为零的交换域, 即包含有理数域 $\mathbb{Q}$ 的域, 不必设 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$; 特别, $\mathbb{K}$ 可以等于 $\mathbb{Q}$. 以下考虑的所有向量空间是在 $\mathbb{K}$ 上的有限维或无穷维向量空间.

定义. 设 E 及 F 是两个向量空间, 设 n 是 $\geqslant 1$ 的整数, 如果存在着 n 重线性映射

$$f : \underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ 个 } E} \to F,$$

并且令

$$\varphi(x) = f(x, \cdots, x) \tag{6.1.1}$$

那么映射 $\varphi : E \to F$ 称为 *n 次齐次多项式*.

关系式 (6.1.1) 表明 $\varphi : E \to F$ 是两个映射的复合:

$$E \xrightarrow{\Delta} E^n \xrightarrow{f} F,$$

其中 f 是多重线性的, 并且 Δ 表示对角映射

$$\Delta(x) = \underbrace{(x, \cdots, x)}_{n \text{ 个 } x}.$$

命题 6.1.1. 如果 $\varphi : E \to F$ 是 n 次齐次多项式, 那么存在着一个对称多重线性映射 $g : E^n \to F$, 使得

$$\varphi(x) = g(x, \cdots, x). \tag{6.1.2}$$

事实上, 如果 f 是多重线性映射 $E^n \to F$, 使得 (6.1.1) 成立, 那么只须取

$$g(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}),$$

其中求和是对集合 $[1, 2, \cdots, n]$ 的 $n!$ 个排列 σ 取的.

注意. 在下面 (系 6.3.3) 可以看到: 当 φ 是已给 n 次齐次多项式时, 存在唯一一个对称 n 重线性映射 g 满足 (6.1.2).

例. 对于 $n=1$, 从 E 到 F 的一次齐次多项式就是一个线性映射 $E\to F$.

对于 $n=0$, 我们约定零次齐次多项式是常量 (不论是什么常量映射 $E\to F$).

注意. 如果 $\varphi: E\to F$ 是 n 次齐次多项式, 我们有: 对任何纯量 $\lambda\in\mathbb{K}$,

$$\varphi(\lambda x)=\lambda^n\varphi(x). \tag{6.1.3}$$

事实上, 由关系式 (6.1.1) 得

$$\varphi(\lambda x)=f(\lambda x,\cdots,\lambda x)=\lambda^n f(x,\cdots,x)=\lambda^n\varphi(x).$$

命题 6.1.2. 考虑所有映射 $E\to F$ 的向量空间; n 次齐次多项式 $E\to F$ 的集是这一空间的子向量空间.

我们记得: 关于从 E 到 F 的集的向量空间, 它的结构如下: 两个这种映射的和 $\varphi+\psi$ 是映射

$$x\mapsto\varphi(x)+\psi(x);$$

纯量 $\lambda\in\mathbb{K}$ 乘映射 $\varphi: E\to F$ 的积 $\lambda\varphi$ 是映射 $x\mapsto\lambda\cdot\varphi(x)$. 在这定义中, 用到了 F 的向量空间结构. 于是因为所有 n 重线性映射 $E^n\to F$ 形成一向量空间, 所以命题 6.1.2 是显然的.

齐次多项式的乘法. 设

$$\varphi: E\to F,\quad \psi: E\to G$$

是两个齐次多项式, φ 是 p 次的, ψ 是 q 次的; E, F, G 表示三个向量空间. 如果还有第四个向量空间 H, 并且如果给出一个双重线性映射

$$\Phi: F\times G\to H,$$

那么我们给出映射 φ 及 ψ 关于 Φ 的 "积" 的定义: 它就是在 E 中确定、在 H 中取值的映射

$$x\mapsto\Phi(\varphi(x),\psi(x)).$$

命题 6.1.3. 在上面的假设下, φ (p 次齐次多项式) 及 ψ (q 次齐次多项式) 的 "积" 是 $p+q$ 次齐次多项式.

证. 设 $f: E^p\to F$ 及 $g: E^q\to G$ 是两个多重线性映射如下:

$$\varphi(x)=f(x,\cdots,x),\quad \psi(x)=g(x,\cdots,x).$$

用下式定义 $h: E^{p+q} \to H$:

$$h(x_1, \cdots, x_{p+q}) = \Phi(f(x_1, \cdots, x_p), g(x_{p+1}, \cdots, x_{p+q})).$$

显然 h 是多重线性的, 而且我们有

$$h(x, \cdots, x) = \Phi(\varphi(x), \psi(x)).$$

命题得证.

注意. 特别当 $G = \mathbb{K}, H = F$, 映射是 $\Phi: F \times \mathbb{K} \to F$ 时, 可应用上列命题, 这里 $F \times \mathbb{K}$ 是由 F 中向量与纯量的积组成的, 更特别地, 如果还设 $F = \mathbb{K}$, 我们就得到取纯量值的齐次多项式的乘法; 它满足交换律及结合律.

6.2. 不一定齐次的多项式

定义. 如果存在着整数 n 以及齐次多项式 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n (\varphi_i: E \to F$ 是 i 次齐次多项式), 并且

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_n \tag{6.2.1}$$

(这里用到的是映射 $E \to F$ 在向量空间中的加法), 那么映射 $\varphi: E \to F$ 称为不一定齐次的多项式, 或简称多项式.

注意. 给出 φ 就唯一地确定了 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$, 这一事实并不明显. 以后可看到 (系 6.3.2), 情况确实是这样的.

当 (6.2.1) 成立时, 就说 φ 是次数 $\leqslant n$ 的多项式. 对于任何 $p \geqslant n$, 任何次数 $\leqslant n$ 的多项式也是次数 $\leqslant p$ 的多项式. 任何次数 $\leqslant 0$ 的多项式是常量映射. 可以约定把恒等于零的多项式叫做次数 < 0 的多项式.

显然, 次数 $\leqslant n$ 的多项式 $E \to F$ 形成一向量空间.

对多项式 (关于双线性映射 $\Phi: E \times G \to H$, 如前所述) 的乘法, 显然, 次数 $\leqslant p$ 的多项式 $\varphi: E \to F$ 及次数 $\leqslant q$ 的多项式 $\psi: E \to G$ 的积是次数 $\leqslant p+q$ 的多项式 $E \to H$, 事实上

$$\Phi(\varphi(x), \psi(x)) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \Phi(\varphi_i(x), \psi_j(x)),$$

并且 $x \mapsto \Phi(\varphi_i(x), \psi_j(x))$ 是 $i+j$ 次齐次多项式 (命题 6.1.3). 特别, 可以考虑一些多项式 $E \to \mathbb{K}$ 的代数 (一些取纯量值的多项式).

第一例. 设 $E = \mathbb{K}$ (看作一维向量空间). 任何 n 线性映射

$$\mathbb{K}^n \to F$$

的形式是

$$(x_1, \cdots, x_n) \to x_1 \cdots x_n c,$$

其中 $c \in F$, 如果把所有的 $x_i \in \mathbb{K}$ 用同一 $x \in \mathbb{K}$ 来代替, 可见从 $\mathbb{K}$ 到 F 的任何 n 次齐次多项式有下列形状:

$$x \mapsto x^n c \quad (\text{其中 } c \in F).$$

特别, 当 $F = \mathbb{K}$ 时, n 次齐次多项式是纯变量 x 的函数, 它的形式如下:

$$x \mapsto cx^n,$$

其中 $c \in \mathbb{K}$ 是纯量. 我们正好又得到了一个纯量变量多项式的经典概念.

更一般地, 探索什么时候映射 $\mathbb{K}^p \to F$ 是 n 次齐次多项式 φ (我们刚考察了 $p = 1$ 情形). 为此, 首先探索多重线性映射

$$f : \underbrace{\mathbb{K}^p \times \cdots \times \mathbb{K}^p}_{n \text{ 个 } \mathbb{K}^p} \to F,$$

然后应用公式 (6.1.1) 求出 φ. 设 $x^1, \cdots, x^n$ 是 $\mathbb{K}^p$ 中的 n 个向量; 其中每个向量, 例如 x^i, 有 p 个坐标

$$x_1^i, \cdots, x_p^i.$$

把 $\mathbb{K}^p$ 的典范基记作 $(e_1, \cdots, e_p)$; 于是有

$$x^i = \sum_{j=1}^{p} x_j^i e_j.$$

由 f 的多重线性, 就有

$$f(x^1, \cdots, x^n) = \sum_{j_1, \cdots, j_n} x_{j_1}^1 \cdots x_{j_n}^n f(e_{j_1}, \cdots, e_{j_n}),$$

其中整数 $j_1, \cdots, j_n$ 从 1 到 p 独立变化. 令

$$f(e_{j_1}, \cdots, e_{j_n}) = c_{j_1, \cdots, j_n} \in F.$$

可见用 n 个向量 $x^1, \cdots, x^n$ 的坐标, 可将 f 表示如下:

$$f(x^1, \cdots, x^n) = \sum_{j_1, \cdots, j_n} x_{j_1}^1 \cdots x_{j_n}^n c_{j_1, \cdots, j_n}.$$

反过来说, 属于上关系式右边类型的任何映射, 就是一个多重线性映射 $\mathbb{K}^p \times \cdots \times \mathbb{K}^p \to F$.

[习题. "系数" $c_{j_1, \cdots, j_n}$ 必须满足哪些条件, 才能使 f 关于 $x^1, \cdots, x^n$ 是对称的?]

有了上述结果, 现在来计算 $f(x,\cdots,x)$; 如果 $x=\sum_{j=1}^{p}x_je_j$, 可见任何 n 次齐次多项式 $\varphi:\mathbb{K}^p\to F$ 有下列形状:

$$\varphi(x)=\sum_{j_1,\cdots,j_n}x_{j_1}\cdots x_{j_n}c_{j_1,\cdots,j_n},\tag{6.2.2}$$

其中 $c_{j_1,\cdots,j_n}\in F$, 整数 $j_1,\cdots,j_n$ 独立取遍集 $[1,\cdots,p]$ 中的值. 对于每个序列 $(j_1,\cdots,j_n)$, 设 α_i 是整数 i 出现在这序列中的次数 $(1\leqslant i\leqslant p)$; 我们有 $\alpha_i\geqslant 0$. 于是

$$x_{j_1}\cdots x_{j_n}=(x_1)^{\alpha_1}\cdots(x_p)^{\alpha_p},$$

其中 $\alpha_1+\cdots+\alpha_p=n$. 注意有多个序列 $(j_1,\cdots,j_n)$ 提供给同一指数序列 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$. 这些序列是由其中的一个通过 $j_1,\cdots,j_n$ 的排列导出的. 在 (6.2.2) 中, 集中提供相同指数序列的各项, 最后看出有

$$\varphi(x)=\sum(x_1)^{\alpha_1}\cdots(x_p)^{\alpha_p}d_{\alpha_1,\cdots,\alpha_p},\tag{6.2.3}$$

其中 "系数" $d_{\alpha_1,\cdots,\alpha_p}$ 是 F 中的元素, 和式是对满足 $\alpha_1+\cdots+\alpha_p=n$ 的序列 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)$ (整数 $\alpha_i\geqslant 0;i=1,\cdots,p$) 作出.

反过来说, 像 (6.2.3) 那样的公式所给出的函数 φ 就是 n 次齐次多项式.

[*习题.* 可以确定一种对称 n 重线性映射 f, 使得 $\varphi(x)=f(x,\cdots,x)$.]

公式 (6.2.3) 表明: 纯变量 $x_1,\cdots,x_p$ 的 n 次齐次多项式的经典概念, 正好与这里所确定的相符合.

6.3. 多项式的逐次"差分"

首先设 $\varphi:E\to F$ 是任一映射. (E 及 F 总是表示 $\mathbb{K}$ 上的向量空间). 把下式确定的映射 $E\to F$ 记作 $\Delta_h\varphi$:

$$(\Delta_h\varphi)(x)=\varphi(x+h)-\varphi(x).\tag{6.3.1}$$

[$x\in E$ 的这一映射依赖于参变量 $h\in E$.] 对这一新映射, 可应用同样的记号; 如果 $x_1\in E,x_2\in E$, 那么我们有 $\Delta_{x_2}(\Delta_{x_1}\varphi)$, 即下列映射:

$$\begin{aligned}x\mapsto&(\Delta_{x_1}\varphi)(x+x_2)-(\Delta_{x_1}\varphi)(x)\\&=\varphi(x+x_1+x_2)-\varphi(x+x_2)-\varphi(x+x_1)+\varphi(x).\end{aligned}\tag{6.3.2}$$

我们将把映射 $\Delta_{x_2}(\Delta_{x_1}\varphi)$ 简单记作 $\Delta_{x_2}\Delta_{x_1}\varphi$; 注意由上列公式, 这映射对称地依赖于 x_1 及 x_2:

$$\Delta_{x_2}\Delta_{x_1}\varphi=\Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\varphi.$$

把它叫做 φ 关于 x_1 及 $x_2\in E$ 的*二阶差分*. [注意二阶差分事实上已在定理 5.1.1 的证明中出现过.]

对 n 递推, 我们确定 n 阶差分是

$$\Delta_{x_n}\Delta_{x_{n-1}}\cdots\Delta_{x_1}\varphi = \Delta_{x_n}(\Delta_{x_{n-1}}\cdots\Delta_{x_1}\varphi).$$

它是 2^n 个有下列形状的映射的和:

$$x \mapsto (-1)^{n-p}\varphi(x + x_{i_1} + \cdots + x_{i_p}), \tag{6.3.3}$$

其中严格递增序列 $i_1 < \cdots < i_p$ 是在序列 $[1, 2, \cdots, n]$ 中取出的整数形成的. 证明可就 n 递推作出.

就 n 递推, 可证明 $\Delta_{x_n}\Delta_{x_{n-1}}\cdots\Delta_{x_1}\varphi$ 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的对称映射; 对于 $n = 2$, 我们已看到这一点.

下列定理是多项式代数理论的基本结果:

定理 6.3.1. 设 $\varphi = \varphi_0 + \cdots + \varphi_n$ 是次数 $\leqslant n$ 的多项式 $E \to F$, 并且设 $f_n : E^n \to F$ 是满足下式的对称多重线性映射

$$\varphi_n(x) = f_n(x, \cdots, x) \tag{6.3.4}$$

[已知这样的 f_n 存在, 参看命题 6.1.1]. 那么

(i) 一阶差分 $\Delta_h\varphi : E \to F$ 是次数 $\leqslant n-1$ 的多项式;

(ii) n 阶差分 $\Delta_{x_1}\cdots\Delta_{x_n}\varphi$ 是一常量, 并且我们有

$$\Delta_{x_1}\cdots\Delta_{x_n}\varphi = n!f_n(x_1, \cdots, x_n) \ (\text{不依赖于 } x \in E). \tag{6.3.5}$$

在证明这定理前, 立即由它导出几个重要的推论.

系 6.3.2. 已知次数 $\leqslant n$ 的多项式 φ, 就唯一地确定了齐次多项式 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$, 使得

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i.$$

事实上, 可对 n 递推证明系 6.3.2 中的结果. 这结果对 $n = 0$ 成立: 由定义, 次数 $\leqslant 0$ 的多项式化成一常量 φ_0, 假定这结果已对 $n-1 (n \geqslant 1)$ 证明, 要对 n 来证明它. 由定理 6.3.1 中结论 (ii), 已知 φ 就可算出 f_n, 从而由 (6.3.4) 得 φ_n; 因此当已知 φ 时, φ_n 是唯一地确定的. 但由此可知 $\varphi - \varphi_n$ 是次数 $\leqslant n-1$ 的多项式, 对它可应用递推时所作假设.

名词: φ_i 叫做多项式 φ 的 i 次齐次合成多项式.

系 6.3.3. 已知一个 n 次齐次多项式 $\varphi_n : E \to F$. 那么存在着唯一一个对称多重线性映射 $f_n : E^n \to F$ 满足 (6.3.4).

因为把定理 6.3.1 中结论 (ii) 应用到 $\varphi=\varphi_n$, 必然有

$$f_n(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{n!}\Delta_{x_1}\cdots\Delta_{x_n}\varphi_n.$$

记号. 与 φ_n 相关的这唯一的对称多重线性映射今后将记作 $\widetilde{\varphi}_n$. 因此有两个基本关系式

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_n(x)&=\widetilde{\varphi}_n(x,\cdots,x)\\ \widetilde{\varphi}_n(x_1,\cdots,x_n)&=\frac{1}{n!}\Delta_{x_1}\cdots\Delta_{x_n}\varphi_n\end{aligned}}\tag{6.3.6}$$

由此可从 $\widetilde{\varphi}_n$ 转变到 φ_n, 并且也可反过来转变.

定理 6.3.1 的证明. 我们要对 n 递推来证明. 这定理当 $n=1$ 时成立; 因为如果 $\varphi=\varphi_0+\varphi_1$, 就有

$$(\Delta_h\varphi)(x)=\varphi_0+\varphi_1(x+h)-\varphi_0-\varphi_1(x)=\varphi_1(h),$$

它正好是一常量 (不依赖 x): 这就是结论 (i). 而且这常量是 $\varphi_1(h)$, 由此得 (6.3.5), 因为由 (6.3.4), $\varphi_1=f_1$.

假定定理对 $n-1$ 成立 $(n\geqslant 2)$, 要证明它对 n 成立. 我们有

$$\Delta_h\varphi=\Delta_h\varphi_n+\Delta_h(\varphi_0+\cdots+\varphi_{n-1})$$

由递推假设, $\Delta_h(\varphi_0+\cdots+\varphi_{n-1})$ 是次数 $\leqslant n-2$ 的多项式. 计算

$$(\Delta_h\varphi_n)(x)=\varphi_n(x+h)-\varphi_n(x)=f_n(x+h,\cdots,x+h)-f_n(x,\cdots,x).$$

如果将上式展开, 并且考虑到 f_n 是对称多重线性映射, 就得到

$$(\Delta_h\varphi_n)(x)=nf_n(\underbrace{x,\cdots,x}_{n-1\text{ 个 }x},h)+\cdots$$

其中 $\cdots$ 表示次数 $\leqslant n-2$ 的 x 的多项式. 最后得:

$$(\Delta_h\varphi)(x)=nf_n(x,\cdots,x,h)+\psi(x,h),$$

其中 ψ 是次数 $\leqslant n-2$ 的 x 的多项式; 在这关系式中, $nf_n(x,\cdots,x,h)$ 是 x 的 $n-1$ 次齐次多项式. 这就证明了定理的结论 (i), 并且得到了更准确的结果. 改变记号, 得

$$\Delta_{x_n}\varphi=\psi_{n-1}+\psi_{n-2}+\cdots+\psi_0,$$

其中 ψ_i 是 x 的 i 次齐次多项式 (还依赖于参变量 x_n), 并且

$$\psi_{n-1}(x)=g_{n-1}(x,\cdots,x),$$

而 g_{n-1} 是由下式确定的对称多重线性映射:

$$g_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}) = nf_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \tag{6.3.7}$$

[映射 g_{n-1} 依赖于参变量 x_n].

现在可对次数 $\leqslant n-1$ 的多项式 $\Delta_{x_n}\varphi$ 应用递推假设: 结论 (ii) (对于 $n-1$) 告诉我们 $\Delta_{x_1}\cdots\Delta_{x_{n-1}}(\Delta_{x_n}\varphi)$ 是一常量, 并且等于 $(n-1)!g_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1})$. 如果利用 (6.3.7) 来阐明, 正好得到 (6.3.5). 证完.

6.4. E 及 F 是赋范向量空间情形

这里涉及的是域 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的赋范向量空间. 在这种情形下, 提出了多项式 $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_n : E \to F$ 的连续性问题. 用 $\widetilde{\varphi}_i$ 表示与多项式 φ 的合成多项式 φ_i 相连带的对称 i 重线性映射. 注意 $\widetilde{\varphi}_0 = \varphi_0$ (常量), 并且 $\widetilde{\varphi}_1 = \varphi_1$ (线性映射).

定理 6.4.1. 用前面的记号, 下列条件是等价的:

(a) $\widetilde{\varphi}_0, \widetilde{\varphi}_1, \cdots, \widetilde{\varphi}_n$ 是连续映射;

(b) $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 是连续映射;

(c) 多项式 φ 是连续映射;

(d) φ 在原点连续;

(e) 存在着 $r > 0$, 使得 $\|\varphi(x)\|$ 对于 $\|x\| \leqslant r$ 有界;

(f) 对任何 $r > 0, \|\varphi(x)\|$ 在球 $\|x\| \leqslant r$ 上有界.

[条件 (a), (b), (c), (d), (e), (f) 给出了多项式 φ 连续性的判别法.]

证. (a)⇒(b)⇒(c)⇒(d) 是明显的. 现要证明 (d)⇒(a), 这样就证明了 (a), (b), (c), (d) 等价. 因此设 φ 在原点连续; 于是由 (6.3.5),

$$\widetilde{\varphi}_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{n!}\Delta_{x_1}\cdots\Delta_{x_n}\varphi,$$

并且由 (6.3.3), 上式右边是 2^n 个数量的和, 其中每一数量形如

$$\frac{(-1)^{n-p}}{n!}\varphi(x_{i_1} + \cdots + x_{i_p}) \tag{6.4.1}$$

[在 (6.3.3) 中, 可取 $x = 0$, 因为事实上 $\Delta_{x_1}\cdots\Delta_{x_n}\varphi$ 是不依赖于 x 的常量], 显然每个表达式 (6.4.1) 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的映射, 并且在原点 $(0, \cdots, 0)$ 连续, 因为已设 $\varphi(x)$ 在原点连续. 因此 $\widetilde{\varphi}_n(x_1, \cdots, x_n)$ 在原点连续; 由于 $\widetilde{\varphi}_n$ 是多重线性的, 它是到处连续的 (参看定理 1.8.1). 于是

$$\varphi_n(x) = \widetilde{\varphi}_n(x, \cdots, x)$$

连续, 特别在 $x = 0$ 连续, 因此

$$\varphi - \varphi_n = \varphi_0 + \cdots + \varphi_{n-1}$$

在原点连续; 而这是次数 $\leqslant n-1$ 的多项式. 因此我们达到了就 n 递推证明 (d)⇒(a) 的目的, 因为对于 $n=0$, (d)⇒(a) 是显而易见的.

现在来证明 (a)⇒(f)⇒(e)⇒(a), 由此就证明了定理中列举的所有条件等价. 先证明 (a)⇒(f): 设 $\widetilde{\varphi}_0, \cdots, \widetilde{\varphi}_n$ 连续; 于是给定 $r>0$, 我们知道, 对于每个 $i \leqslant n$,

$$\|\widetilde{\varphi}_i(x_1, \cdots, x_i)\|$$

当 $\|x_1\| \leqslant r, \cdots, \|x_i\| \leqslant r$ 时有界. 于是更加有:

$$\|\varphi_i(x)\| = \|\widetilde{\varphi}_i(x, \cdots, x)\|$$

当 $\|x\| \leqslant r$ 时有界; 因此

$$\|\varphi(x)\| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \|\varphi_i(x)\|$$

在 $\|x\| \leqslant r$ 时有界, 并且 (f) 成立.

(f)⇒(e) 是明显的.

余下只要证明 (e)⇒(a). 还是对 n 递推; 对于 $n=0$, (e)⇒(a) 是显而易见的. 假定对于 $n-1$ 证明了这一结论, 要对 n 作出证明. 由假设, 有一个 $r>0$ 及一个 $M>0$, 使得对于满足 $\|x\| \leqslant r$ 的任何 x,

$$\|\varphi(x)\| \leqslant M.$$

由 (6.4.1), 可见当 $\|x_i\| \leqslant \frac{r}{n}$ 时,

$$\|\widetilde{\varphi}_n(x_1, \cdots, x_n)\| \leqslant \frac{2^n}{n!} M.$$

因此多重线性映射 $\widetilde{\varphi}_n$ 是连续的 (参看定理 1.8.1), 并且当 $\|x_i\| \leqslant r$ 时, $\|\widetilde{\varphi}_n(x_1, \cdots, x_n)\|$ 有界; 更加有: 当 $\|x\| \leqslant r$ 时, $\|\varphi_n(x)\|$ 有界, 因此当 $\|x\| \leqslant r$ 时, $\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|$ 有界, 并且可把递推假设应用到多项式 $\varphi - \varphi_n = \varphi_0 + \cdots + \varphi_{n-1}$. 由此得 $\widetilde{\varphi}_0, \cdots, \widetilde{\varphi}_{n-1}$ 是连续映射, 并且已证明 $\widetilde{\varphi}_n$ 是连续的, 于是 (a) 得证.

定理 6.4.1 的证明完成.

注意. 假定赋范 e.v. E 是有限维的. 那么我们知道任何多重线性映射 $E^n \to F$ 连续. 因此定理 6.4.1 中的条件 (a) 总是成立. 由此可见, 当 E 有有限维时, 任何多项式 $\varphi: E \to F$ 是连续的.

7. 有限展开式

7.1. 定义

设 E 及 F 是巴拿赫空间, 并设 V 是 E 中含原点 $O \in E$ 的开集. 设有整数 $n \geqslant 0$, 并设有映射 $g: V \to F$; 如果

$$\|g(x)\| = o(\|x\|^n),$$

就说映射 g 在原点以 n 阶与零相切 (或与零 n 阶相切, 或与零 n 相切). 对于 $n=1$, 又得到了映射与零相切的概念 (参照 2.1). 显然, 如果 g 与零 $(n+1)$ 阶相切, g 更加是与零 n 阶相切.

根据这一概念, 可以在一些映射 $V \to F$ 之间, 确定一种等价关系; 已给两映射. g_1 及 g_2; 如果 $g_1 - g_2$ 在原点与零 n 相切, 就说 g_1 在原点与 g_2 是 n 相切.

命题 7.1.1. 如果 $g: V \to F$ 在原点与零 n 相切, 我们有

$$\|(\Delta_{x_1} \cdots \Delta_{x_n} g)(0)\| = o((\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|)^n). \tag{7.1.1}$$

证. 只须证明: 每当 $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_p \leqslant n$, 就有

$$\|g(x_{i_1} + \cdots + x_{i_p})\| = o((\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|)^n);$$

而这是明显的.

定义. 设 U 是巴拿赫空间 E 中一开集, 并且设 $f: U \to F$ 是在巴拿赫空间 F 中取值的一个映射. 已给一个次数 $\leqslant n$ 的多项式 $\varphi: E \to F$; 如果在一点 $a \in U$,

$$\|f(a+x) - \varphi(x)\| = o(\|x\|^n),$$

换句话说, 如果映射 $x \mapsto f(a+x)$ 在原点与 φ 是 n 阶相切, 就说 φ 是 f 在点 a 的 n 阶有限展开式.

注意. 已给 f, 不能确定是否有一多项式 φ 作为 f 在点 a 的 n 阶有限展开式. 可是如果有这样的 φ, 它就是唯一的; 事实上:

命题 7.1.2. 如果 φ_1 及 φ_2 是 f 在点 a 的两个 n 阶有限展开式, 我们必然有 $\varphi_1 = \varphi_2$.

证. 令 $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$. 那么 φ 在原点与零 n 阶相切. 于是只须证明下列引理:

引理. 如果次数 $\leqslant n$ 的多项式 $\varphi: E \to F$ 在原点与零 n 阶相切, 那么 φ 恒等于零.

引理的证明. 对 n 递推证明. 对于 $n=0$, 引理是平凡的 (事实上, 如果一个常量是 $o(1)$, 它就是零). 假定引理对 $n-1$ 正确, 要对 n 来证明它. 设

$$\varphi = \varphi_0 + \cdots + \varphi_n;$$

由 (6.3.5), 有

$$\widetilde{\varphi}_n(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{x_1} \cdots \Delta_{x_n} \varphi;$$

然而已假设 φ 在原点与零 n 阶相切; 因此由 (7.1.1) 得

$$\|\Delta_{x_1} \cdots \Delta_{x_n} \varphi\| = o((\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|)^n);$$

这就是说, 已给 $\varepsilon > 0$, 存在着 η, 使得我们有

$$\|\widetilde{\varphi}_n(x_1, \cdots, x_n)\| \leqslant \varepsilon(\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|)^n, \tag{7.1.2}$$

只要 $\|x_1\| + \cdots + \|x_n\| \leqslant \eta$. 但 (7.1.2) 对任意的 $x_1, \cdots, x_n$ 成立, 因为 $\widetilde{\varphi}_n$ 是多重线性的, 我们有

$$\|\widetilde{\varphi}_n(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)\| = |\lambda|^n \|\widetilde{\varphi}_n(x_1, \cdots, x_n)\|,$$

又因 $\varepsilon > 0$ 可任意选取, 于是对所有 $x_1, \cdots, x_n$,

$$\widetilde{\varphi}_n(x_1, \cdots, x_n) = 0.$$

因此 $\varphi_n \equiv 0$, 并且 φ 的次数 $\leqslant n-1$. 而且 φ 在原点是与零 $(n-1)$ 阶相切. 应用递推假设, 可见函数 φ 恒等于零. 证完.

由于命题 7.1.2, 我们就说到 f 在点 a 的 n 阶有限展开式, 如果这一有限展开式存在的话!

连续性的说明. 显然, 在原点与零 n 相切的映射, 必然在原点连续. 因此如果次数 $\leqslant n$ 的多项式 $\varphi(x)$ 以 n 阶相切于 $f(x+a)$, 那么由 φ 在原点的连续性可导出 f 在点 a 的连续性, 反过来说也成立. 此后, 我们总是设 f 连续; 那么 f 的 n 阶有限展开式 φ 是连续的多项式 (因为 φ 在原点连续, 所以由定理 6.4.1, φ 处处连续).

定义. 设 $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i$ 是次数 $\leqslant n$ 的多项式, 并且设 p 是一整数 $< n$; 我们说多项式 $\sum_{i=0}^{p} \varphi_i$ 是按 p 阶截断 φ 而得.

命题 7.1.3. 设连续映射 $f : U \to F$ 在点 $a \in U$ 有一 n 阶有限展开式 φ. 那么如果 ψ 是按 $p(< n)$ 阶截断 φ 而得, 那么 ψ 是 f 在点 a 的 p 阶有限展开式.

证. 设 $\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i$; 齐次多项式 φ_i 是连续的, 因而

$$\varphi_i(x) = o(\|x\|^i);$$

于是如果 $i > p$, 就有

$$\varphi_i(x) = o(\|x\|^p),$$

因此

$$\|f(x+a) - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)\| \leqslant \|f(x+a) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\| + \|\sum_{i=p+1}^{n} \varphi_i(x)\|,$$

上式右边是 $o(\|x\|^n) + o(\|x\|^p)$, 从而更加是 $o(\|x\|^p)$. 证完.

命题 7.1.4. 如果 $f: U \to F$ 连续, 并且在点 $a \in U$ 有 n 阶有限展开式

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x),$$

我们有

$$\|(\Delta x_1 \cdots \Delta_{x_n} f)(a) - n!\widetilde{\varphi}_n(x_1, \cdots, x_n)\| = o((\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|)^n).$$

证. 对映射

$$g(x) = f(x+a) - \varphi(x)$$

应用命题 7.1.1, 并且注意到由 (6.3.5).

$$\Delta_{x_1} \cdots \Delta_{x_n} \varphi = n!\widetilde{\varphi}_n(x_1, \cdots, x_n).$$

评论. 在连续映射 f 在点 a 有 n 阶有限展开式条件下, n 阶差分 $\Delta_{x_1} \cdots \Delta_{x_n} f$ **"显著地"** 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的对称多重线性 (并且连续的) 映射; "显著地" 表示误差是**阶数** $> n$ 的 "无穷小", 准确地说, 误差是

$$o((\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|)^n).$$

7.2. f 在点 a 处 n 次可微情形

在这种情形下, 泰勒公式 (定理 5.6.3) 准确地表明 f 在点 a 有 n 阶有限展开式 φ:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x),$$

其中 $\varphi_i(x) = \frac{1}{i!} f^{(i)}(a) \cdot (\underbrace{x, \cdots, x}_{i\text{ 个 } x})$. 于是 φ_i 是与对称多重线性映射

$$\widetilde{\varphi}_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}(a) \in \mathscr{L}_i(E; F)$$

相连带的齐次多项式. 由这一事实及命题 7.1.4 可立即导出:

命题 7.2.1. 如果 $f: U \to F$ 在点 a 是 n 次可微的, 我们有

$$\|(\Delta_{x_1} \cdots \Delta_{x_n} f)(a) - f^{(n)}(a) \cdot (x_1, \cdots, x_n)\| = o((\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|)^n). \qquad (7.2.1)$$

评论. f 的 n 阶差分在点 a "显著地" 等于 f 在点 a 的 n 阶导出映射. "显著地" 的意义与上面的解释相同.

习题. 设 $f: U \to F$ 是连续映射, U 是原点 $O \in E$ 的一个星形邻域. 假定 n 阶导出映射 $f^{(n)}(0)$ 存在, 并且对于 $x \in U, 0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$f(tx) = t^n f(x).$$

那么 f 是 n 次齐次多项式.

7.3. 有限展开式的运算

加法. 设 $f: U \to F$ 及 $g: U \to F$ 是两个连续映射 (U 总是表示巴拿赫空间 E 中的一个开集). 如果 f 在点 $a \in U$ 有一个 n 阶有限展开式 φ, 并且如果 g 在点 $a \in U$ 有一个 n 阶有限展开式 ψ, 那么 $\varphi + \psi$ 是 $f + g$ 的 n 阶有限展开式. [证明请读者作出.]

乘法. 设 E, F, G, H 是巴拿赫空间, 并且设 $\Phi: F \times G \to H$ 是连续双重线性映射. 设 U 是 E 中的开集, 并且设

$$f: U \to F, \quad g: U \to G$$

是两个连续映射 · 它们关于 Φ 的 "乘积" 是由下式确定的映射

$$h(x) = \Phi(f(x), g(x)).$$

命题 7.3.1. *用上面的记号, 假定 f 在点 $a \in U$ 有一个 n 阶有限展开式 φ, g 在点 a 有一个 n 阶有限展开式 ψ. 考虑乘积多项式*

$$\lambda(x) = \Phi(\varphi(x), \psi(x)),$$

并且把它按 n 阶截断 · 这样得到的多项式 $\mu: E \to H$ 是 h 在点 a 的 n 阶有限展开式.

证. 我们有

$$f(x+a) = \varphi(x) + r(x), \quad g(x+a) = \psi(x) + s(x),$$

而且

$$\|r(x)\| = o(\|x\|^n), \quad \|s(x)\| = o(\|x\|^n).$$

于是

$$\begin{aligned} &\Phi(f(x+a), g(x+a)) - \Phi(\varphi(x), \psi(x)) \\ &= \Phi(\varphi(x), s(x)) + \Phi(r(x), \psi(x)) + \Phi(r(x), s(x)). \end{aligned}$$

设 $A = \|\Phi\|$ (一个连续双重线性映射的范数; 参看 1.8). 我们有

$$\begin{aligned} \|\Phi(\varphi(x), s(x))\| &\leqslant A\|\varphi(x)\| \cdot \|s(x)\| = o(\|x\|^n), \\ \|\Phi(r(x), \psi(x))\| &\leqslant A\|r(x)\| \cdot \|\psi(x)\| = o(\|x\|^n), \\ \|\Phi(r(x), s(x))\| &\leqslant A\|r(x)\| \cdot \|s(x)\| = o(\|x\|^n), \end{aligned}$$

由此得

$$\|\Phi(f(x+a), g(x+a)) - \Phi(\varphi(x), \psi(x))\| = o(\|x\|^n).$$

既然多项式 $\lambda(x) = \Phi(\varphi(x), \psi(x))$ 与多项式 $\mu(x)$ 之间的差是 $o(\|x\|^n)$. 命题由此得证.

7.4. 两个有限展开式的复合

设 E, F, G 是三个巴拿赫空间, 并且设 U 是 E 中的一个开集, V 是 F 中的一个开集. 考虑两个连续映射

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} G;$$

并且设 $h = g \circ f : U \to G$. 假设 f 在点 $a \in U$ 有 n 阶有限展开式 φ, 并且 g 在点 $b = f(a) \in V$ 有 n 阶有限展开式 ψ. 我们要证明 h 在点 a 有 n 阶有限展开式, 并且要用 φ 及 ψ "计算" 这一有限展开式.

由假设, 我们有

$$f(a+x) = b + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x), \tag{7.4.1}$$

其中 φ_i 是 i 次齐次多项式, 并且 $\|r(x)\| = o(\|x\|^n)$. 同样,

$$g(b+y) = g(b) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(y) + s(y), \quad \|s(y)\| = o(\|y\|^n). \tag{7.4.2}$$

令

$$y = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x), \tag{7.4.3}$$

我们有

$$h(a+x) = g(f(a+x)) = g(b+y).$$

(7.4.3) 表明 $\|y\| = O(\|x\|)$, 从而

$$\|s(y)\| = o(\|x\|^n).$$

如果在 (7.4.2) 中, 把 y 用 (7.4.3) 中所给出它的值来代替, 就得到

$$h(a+x) = h(a) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x) \right) + o(\|x\|^n) \tag{7.4.4}$$

余下要证明映射

$$\psi_j \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x) \right)$$

中每一个与 x 的一个多项式的差是 $o(\|x\|^n)$. 然而

$$\psi_j(u) = \widetilde{\psi}_j(\underbrace{u, \cdots, u}_{j \text{ 个 } u});$$

因此

$$\psi_j \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x) \right) = \widetilde{\psi}_j \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x), \cdots, \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x) \right).$$

如果应用 $\widetilde{\psi}_j$ 的多重线性来展开, 我们就得到许多项的和式; 其中一些项的形状是

$$\widetilde{\psi}_j(\varphi_{i_1}(x), \varphi_{i_2}(x), \cdots, \varphi_{i_j}(x)), \tag{7.4.5}$$

整数 $i_1, \cdots, i_j$ 中每一个 $\geqslant 1$, 并且 $\leqslant n$; 另一些项至少在一处包含 $r(x)$:

$$\widetilde{\psi}_j(\cdots, r(x), \cdots).$$

然而因为 $\|r(x)\| = o(\|x\|^n)$, 并且 $\widetilde{\psi}_j$ 是连续多重线性的, 所以上述含 $r(x)$ 的各项是 $o(\|x\|^n)$.

最后, 我们得到:

$$\|h(a+x) - h(a) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_1 \cdots, i_j} \widetilde{\psi}_j(\varphi_{i_1}(x), \cdots, \varphi_{i_j}(x))\| = o(\|x\|^n).$$

现在要证明: 每个形如 (7.4.5) 的映射是 $i_1 + i_2 + \cdots + i_j$ 次齐次多项式; 这些齐次多项式的和是一多项式, 并且如果把这多项式按 n 阶截断, 就得到 $h = g \circ f$ 的 n 阶有限展开式. 而我们有

$$\widetilde{\psi}_j(\varphi_{i_1}(x), \cdots, \varphi_{i_j}(x)) = \widetilde{\psi}_j(\widetilde{\varphi}_{i_1}(x, \cdots, x), \cdots, \widetilde{\varphi}_{i_j}(x, \cdots, x)),$$

并且这正好是与多重线性 (而且一般不对称) 映射

$$\widetilde{\psi}_j(\widetilde{\varphi}_{i_1}(x_1, \cdots, x_{i_1}), \cdots, \widetilde{\varphi}_{i_j}(\cdots, x_{i_1+\cdots+i_j}))$$

相连带的 $i_1 + \cdots + i_j$ 次齐次多项式. 总之, 映射 $h = g \circ f$ 在点 a 的 n 阶有限展开式是多项式

$$\boxed{h(a) + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i_1+\cdots+i_j \leqslant n} \widetilde{\psi}_j(\varphi_{i_1}(x), \cdots, \varphi_{i_j}(x)) \right)}. \tag{7.4.6}$$

7.5. 计算复合映射的逐阶导出映射

如同在 7.4 段中一样, 总是设 $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} G$. 假定 f 在点 a 是 n 次可微的, 并且 g 在点 b 是 n 次可微的. 我们知道 (定理 5.4.2) $h = g \circ f$ 在点 a 是 n 次可微的. 我们要得到一种方法, 可借助导出映射 $f^{(i)}(a)$ 及 $g^{(j)}(b), 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n$, 来明确地算出 $h^{(n)}(a)$ (对称 n 重线性映射 $E^n \to G$).

原则. 利用泰勒公式, 写出 f 及 g 的有限展开式. 如同在 7.4 段中那样由此导出 h 的有限展开式. 这有限展开式的合成 n 次齐次多项式实际上是

$$\frac{1}{n!} h^{(n)}(a) \cdot (x, \cdots, x);$$

于是我们得到 $h^{(n)}(a) \cdot (x, \cdots, x)$; 并且从此追溯到 $h^{(n)}(a)(x_1, \cdots, x_n)$ [连带于一个齐次多项式的对称多重线性映射].

作为例子, 现对 $n=2$ 情形作出计算:

$$f(x+a)=f(a)+f'(a)\cdot x+\frac{1}{2}f''(a)\cdot(x,x)+\cdots,$$
$$g(x+b)=g(b)+g'(b)\cdot y+\frac{1}{2}g''(b)\cdot(y,y)+\cdots.$$

采用 7.4 段中记号, $\frac{1}{2}h''(a)\cdot(x\cdot x)$ 等于二次齐次多项式:

$$\widetilde{\psi}_1(\varphi_2(x))+\widetilde{\psi}_2(\varphi_1(x),\varphi_1(x)).$$

在这里,

$$\widetilde{\psi}_1=g'(b),\quad \widetilde{\psi}_2=\frac{1}{2}g''(b),$$
$$\varphi_1(x)=f'(a)\cdot x\quad \varphi_2(x)=\frac{1}{2}f''(a)\cdot(x,x).$$

因此有

$$\frac{1}{2}h''(a)\cdot(x,x)=\frac{1}{2}g'(b)(f''(a)\cdot(x,x))+\frac{1}{2}g''(b)\cdot(f'(a)\cdot x,f'(a)\cdot x)$$

上式左边的两倍是与对称双线性形式

$$(x_1,x_2)\mapsto h''(a)\cdot(x_1,x_2)$$

相连带的二次多项式. 右边的两倍是与对称双线性形式

$$(x_1,x_2)\mapsto g'(b)\cdot(f''(a)\cdot(x_1,x_2))+g''(b)\cdot(f'(a)\cdot x_1,f'(a)\cdot x_2)$$

相连带的二次多项式. 由此最后得到用对称双线性映射 $E\times E\to G$ 表示 $h''(a)$ 的公式:

$$\boxed{h''(a)\cdot(x_1,x_2)=g'(b)\cdot(f''(a)\cdot(x_1,x_2))+g''(b)\cdot(f'(a)\cdot x_1,f'(a)\cdot x_2)}.\tag{7.5.1}$$

注意. 假定 $E=\mathbb{R},F=\mathbb{R}$; f 是单实变量数值函数, g 是 (在 G 中取值的) 单实变量映射. 在这种情形下, $f'(a)$ 及 $f''(a)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的元素; $g'(b)$ 及 $g''(b)$ 是 G 中的元素, 而且 $h''(a)$ 也是这样. 于是公式 (7.5.1) 可写成

$$h''(a)=f''(a)\cdot g'(b)+(f'(a))^2\cdot g''(b).$$

(上式右边是 G 中两个元素分别乘以纯量的和).

8. 相对极大与极小

在本节中, 我们考虑取数值的连续映射 $f:U\to\mathbb{R}$; U 总是表示巴拿赫空间 E 中的开集.

8.1. 相对极小的第一个必要条件

定义. 如果点 $a \in U$ 有一个邻域 $V(V \subset U)$, 使得对于任何与 a 不同的 $x \in V$,

$$f(x) \geqslant f(a);$$

换句话说, 如果 U 中满足 $f(x) \geqslant f(a)$ 的点 x 所构成集是 a 的一个邻域, 就说 f 在点 a 取相对极小.

如果点 a 有一个邻域 $V(V \subset U)$, 使得对任何 $x \in V$, 但 x 与 a 不同,

$$f(x) > f(a),$$

就说 f 在点 a 取严格相对极小.

相对极大及严格相对极大分别有类似的定义. 要使 f 取相对极大 (或严格相对极大), 必须而且只须 $-f$ 取相对极小 (或严格相对极小). 此后我们只讲极小情形, 请读者将所讲内容对极大情形进行转述.

命题 8.1.1. 如果 $f: U \to \mathbb{R}$ 在点 $a \in U$ 取相对极小, 并且 f 在点 a 可微, 那么 $f'(a) = 0$ (相对极小的必要条件).

证. 在 $U = \mathbb{R}$ 情形, 即 f 是单实变数函数情形, 这结果是经典的, 我们注意到: 如果有极小, 右导数 $f'_{\mathrm{d}}(a)$ 必然 $\geqslant 0$, 而左导数 $f'_{\mathrm{g}}(a)$ 必然 $\leqslant 0$. 由于假设 f 在点 a 有导数, 我们有 $f'_{\mathrm{d}}(a) = f'_{\mathrm{g}}(a)$, 从而 $f'(a) = 0$.

在一般情形下 (U 是巴拿赫空间 E 中的开集), 任意选取向量 $h \in E$; 考虑单实变数 t 的函数 $g(t) = f(a + ht)$, 它对 $|t| < \varepsilon$ 确定, 其中 ε 充分小. 于是对于 $t = 0, g$ 取相对极小, 因此 $g'(0) = 0$; 而

$$g'(t) = f'(a + th) \cdot h,$$

因而 $f'(a) \cdot h = 0$. 这个式子对任何向量 $h \in E$ 成立, 换句话说线性映射 $f'(a): E \to \mathbb{R}$ 是零. 证完.

注意. 我们深知对于可微数值函数 f, 由 $f'(a)$ 为零不可能断定 f 在点 a 有相对极大或相对极小. 例如对于 $E = \mathbb{R}^2$ 及 a 是原点, 取 $f(x, y) = x^2 - y^2$; 偏导数 f'_x 及 f'_y 在原点是零, 可是 f 在原点既没有相对极大, 也没有相对极小.

8.2. 相对极小的二阶条件

我们知道任何二次齐次多项式

$$\varphi: E \to \mathbb{R}$$

(也叫做二次形式) 来源于满足下列条件的唯一对称双线性映射 $\widetilde{\varphi}: E \times E \to \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x, x).$$

我们有

$$\widetilde{\varphi}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\varphi(x_1 + x_2) - \varphi(x_1) - \varphi(x_2)).$$

定义. 如果对任何 $x \in E$, 二次形式 φ 满足

$$\varphi(a) \geqslant 0,$$

就说 φ 是正的 (记作 $\varphi \geqslant 0$). 也可不太准确地说, 与 $\widetilde{\varphi}$ 连带的双线性形式是正的; 这只是表示, 对任何 $x \in E$,

$$\widetilde{\varphi}(x, x) \geqslant 0.$$

回忆经典的施瓦茨不等式

$$|\widetilde{\varphi}(x, y)|^2 \leqslant \varphi(x) \cdot \varphi(y). \tag{8.2.1}$$

[**证.** 固定 $x \in E$ 及 $y \in E$, 无论纯量 $\lambda \in \mathbb{R}$ 及 $\mu \in \mathbb{R}$ 是什么, $\varphi(\lambda x + \mu y) \geqslant 0$, 展开后, 这就是

$$\lambda^2 \varphi(x) + 2\lambda\mu\widetilde{\varphi}(x, y) + \mu^2 \varphi(y) \geqslant 0.$$

上式左边是 λ 及 μ 的二次三项式, 因此它的判别式 $\leqslant 0$; 由此得不等式 (8.2.1).]

(8.2.1) 的推论. 如果 $\varphi \geqslant 0$, 并且如果对于一个 $x \in E$, 我们有 $\varphi(x) = 0$, 那么对于任何 $y \in E, \widetilde{\varphi}(x, y) = 0$.

定理 8.2.1. *设 $f: U \to \mathbb{R}$ 是在点 $a \in U$ 二次可微的映射* (U 是巴拿赫空间 E 中的开集). *如果 f 在点 a 有相对极小, 那么我们不但有 $f'(a) = 0$* (命题 8.1.1), *而且有*

$$f''(a) \geqslant 0. \tag{8.2.2}$$

当心! 条件 (8.2.2) 表明: 对称双线性形式 $f''(a)$ 是正的; 换句话说, 对任何 $x \in E$,

$$f''(a)(x, x) \geqslant 0.$$

证. 由于 $f'(a) = 0$, 由泰勒公式得

$$f(a + x) - f(a) = \frac{1}{2} f''(a) \cdot (x, x) + r(x),$$

而且 $\|r(x)\| = o(\|x\|^2)$. 既然由假设, f 在点 a 有相对极小, 只要 $\|x\|$ 充分小, 我们有

$$f''(a) \cdot (x, x) + 2r(x) \geqslant 0.$$

任意固定 x, 并设 t 是一实变量; 对于 $|t|$ 充分小, 我们有

$$f''(a) \cdot (tx, tx) + 2r(tx) \geqslant 0; \tag{8.2.3}$$

然而 (固定 x), 我们有

$$f''(a)\cdot(tx,tx)=t^2f''(a)\cdot(x,x)$$
$$2r(t,x)=\varepsilon(t,x)t^2,$$

其中 ε 随着 t 趋近于 0. 由 (8.2.3) 得: 对于小的 $|t|$,

$$f''(a)\cdot(x,x)+\varepsilon(t,x)\geqslant 0,$$

并且由于 ε 随着 t 趋近于 0, 在上式中取极限得:

$$f''(a)\cdot(x,x)\geqslant 0.$$

证完.

8.3. 严格相对极小的充分条件

事先我们必须略为离题讲述二次形式. 设 φ 是连续二次形式, 并且设

$$\widetilde{\varphi}\in\mathscr{L}_2(E;\mathbb{R})\approx\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E;\mathbb{R}))$$

是连带的连续双线性形式. 注意 $\mathscr{L}(E;\mathbb{R})=E^*$, 即巴拿赫空间 E 的 (拓扑) 对偶空间.

定义. 设 φ 是连续二次形式; 如果 $\widetilde{\varphi}\in\mathscr{L}(E;E^*)$ 实际上是一同构 $E\to E^*$ (巴拿赫空间的同构), 换句话说, 如果 $\widetilde{\varphi}\in\mathrm{Isom}(E;E^*)$, 就说 φ 是非退化的.

命题 8.3.1. 要使 φ 是非退化的, 必须有: 如果一个 $x\in E$ 可以使得对于任何 $y\in E$,

$$\widetilde{\varphi}(x,y)=0,$$

那么 $x=0$. 当 E 有有限维时, 这一必要条件也是充分条件.

证. 对于线性映射

$$y\mapsto\widetilde{\varphi}(x,y),$$

引进记号 $\widetilde{\varphi}_x$; 换句话说, $\widetilde{\varphi}_x(y)=\widetilde{\varphi}(x,y)$. $\widetilde{\varphi}$ 所定义的线性映射 $E\to E^*$ 准确地表示出就是

$$x\mapsto\widetilde{\varphi}_x.\tag{8.3.1}$$

说 φ 是非退化的, 就是说 (8.3.1) 是从 E 到它的对偶 E^* 上的同构. 如果是这样, 线性映射 (8.3.1) 的核化为 0; 换句话说, 由 $\widetilde{\varphi}_x=0$ 可导出 $x=0$. 这正好是命题中所述条件.

反过来说, 这条件表明线性映射 (8.3.1) 是一单射. 如果 E 有有限维 n, 我们知道 E^* 也有有限维 n; 既然从 E 到 E^* 的映射 (8.3.1) 的核是零, 于是这映射是从 E

到 E^* 的一个双射. 因而这是向量空间之间的同构, 又因逆映射 $E^* \to E$ 是连续的 (由于 E^* 有有限维), 映射 (8.3.1) 是 $\mathrm{Isom}(E; E^*)$ 中一个元素; 于是 φ 是非退化的. 证完.

注意. 当 E 有有限维时, 可用从 E 到 E^* 的线性变换 (8.3.1) 的行列式 $\neq 0$, 来表示 φ 是非退化的, 这里 E 及 E^* 是有两个基的对偶. 上述行列式称为关于 E 的基的二次形式的判别式.

现设 $\varphi: E \to \mathbb{R}$ 是连续二次形式, 而且它同时是正的和非退化的. 那么对于任何 $x \neq 0$, 我们有

$$\varphi(x) > 0. \tag{8.3.2}$$

事实上, 如果 $\varphi(x) = 0$, 那么对任何 $y, \widetilde{\varphi}(x, y) = 0$ (由 (8.2.1)); 既然 φ 是非退化的. 从而 $x = 0$ (命题 8.3.1). 但我们可以加强不等式 (8.3.2):

定理 8.3.2. 如果 φ 是非退化正 (连续) 二次形式, 那么存在着一常数 $\lambda > 0$, 使得对任何 $x \in E$,

$$\varphi(x) \geqslant \lambda \|x\|^2. \tag{8.3.3}$$

证. 在 E 有有限维情形, 可用紧性的理由来证明 (8.3.3). 为了概念明确, 假定 $\|x\|$ 是欧几里得范数 (已知任何其他范数与它等价). 设 Σ 是单位球面, 即 $x \in E$ 且满足 $\|x\| = 1$ 的 x 所构成的集; 这是一个紧空间. 函数 φ 在 Σ 上连续, 并且由 (8.3.2), 对任何 $x \in \Sigma, \varphi(x) > 0$. 由拓扑的一个经典定理, $\varphi(x)$ 至少在 Σ 上一点达到它的下确界 λ. 因此 $\lambda > 0$, 并且对于 $\|x\| = 1$,

$$\varphi(x) \geqslant \lambda.$$

由此通过位似变换立即导出 (8.3.3).

现作出另一证明, 它适用于巴拿赫空间 E 的一般情形. 既然由假设 $x \to \widetilde{\varphi}_x$ 是一同构 $E \mapsto E^*$, 存在着 $\mu > 0$, 使得对任何 $x \in E$

$$\|x\| \leqslant \mu \|\widetilde{\varphi}_x\|$$

[$\|\widetilde{\varphi}_x\|$ 表示 $E^* = \mathscr{L}(E; \mathbb{R})$ 中的范数]. 固定 $x \in E$, 由 E^* 中范数的定义, 我们有

$$\|\widetilde{\varphi}_x\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\widetilde{\varphi}_x(y)| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\widetilde{\varphi}(x, y)|.$$

因此存在着 $y \in E$, 使得 $\|y\| \leqslant 1$, 并且

$$|\widetilde{\varphi}(x, y)| \geqslant \frac{1}{2} \|\widetilde{\varphi}_x\|,$$

由此得

$$\|x\| \leqslant 2\mu |\widetilde{\varphi}(x, y)|.$$

由施瓦茨不等式 (8.2.1), 因而有

$$\|x\|^2 \leqslant 4\mu^2\varphi(x)\varphi(y).$$

既然 $\|y\| \leqslant 1$, 我们有 $\|\varphi(y)\| \leqslant M$ (固定的数); 这是因为 φ 在单位球上连续, 从而有界. 于是

$$\|x\|^2 \leqslant 4\mu^2 M\varphi(x);$$

取 $\lambda = 1/(4\mu^2 M)$, 就证明了 (8.3.3).

我们现在能给出严格极小的一个充分条件:

定理 8.3.3. *设 $f: U \to \mathbb{R}$ 是在点 $a \in U$ 二次可微的映射. 如果 $f'(a) = 0$, 并且如果 $f''(a)$ 是正的, 并且是非退化的, 那么 f 在点 a 有严格相对极小.*

证. 由泰勒公式, 我们有

$$f(a+x) - f(a) = \frac{1}{2}f''(a)\cdot(x,x) + \varepsilon(x)\|x\|^2,$$

其中 $\varepsilon(x)$ 随着 x 趋近于 0. 由定理 8.3.2, 存在着 $\lambda > 0$, 使得

$$f''(a)\cdot(x,x) \geqslant \lambda\|x\|^2.$$

因此

$$f(a+x) - f(a) \geqslant \left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon(x)\right)\|x\|^2.$$

只要 $\|x\|$ 充分小, 我们有 $\lambda/2 + \varepsilon(x) > 0$; 如果还有 $x \neq 0$, 就得到

$$f(a+x) - f(a) > 0.$$

证完.

习题

习题 1. 设 E 是实数域上的赋范向量空间. E 中任何子向量空间 H 如果有余维数 1 (即 E/H 的维数是 1), 那么 H 就叫做*超平面*.

(a) 证明 E 的子向量空间的附贴是子向量空间. 由此导出: 超平面或者是闭的, 或者在 E 中是处处稠密的.

(b) 设 u 是 E 上的线性形式. 证明: u 不连续必须而且只须存在着一个序列 $(x_n) \subset E$, 对于 $n \to \infty, x_n \to 0$, 而对于任何 $n, u(x_n) = 1$.

(c) 设 $x_0 \in E$ 是有范数 1 的一个向量, 设 H 是 x_0 所产生的 E 中向量子空间的代数补集, 那么对于任何 $x \in E$, 我们有唯一的分解

$$x = t(x)x_0 + y(x),$$

其中 t 及 y 是从 E 分别到 $\mathbb{R}$ 及 H 的线性映射. 证明 t 及 y 是连续的必须而且只须 H 是闭的.

(d) 设 u 是 E 上的线性映射. 证明 u 是连续的必须而且只须它的核 $H = u^{-1}(\{0\})$ 是闭的.

习题 2. 设 E 是满足下列条件的所有实数序列 $x = (\xi_n)_{n\geqslant 0}$ 构成的巴拿赫空间: $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$, 并且范数是 $\|x\| = \sup\limits_n |\xi_n|$. 对于任何整数 $m \geqslant 0$, 令 $e_m = (\delta_{mn})_{n\geqslant 0} \in E$, 其中 δ_{mn} 是克罗内克记号 (如果 $m \neq n, \delta_{mn} = 0$, 并且 $\delta_{mm} = 1$).

(a) 证明对于任何 $x = (\xi_n) \in E$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi_n e_n$ 收敛, 并且级数和 $x \in E$.

设 u 是 E 上的连续线性形式: 令 $u(e_n) = \eta_n$. 证明实数序列 $(\eta_n)_{n\geqslant 0}$ 可和, 并且线性形式 u 的范数等于

$$\|u\| = \sum_{n=0}^{\infty} |\eta_n|.$$

由此导出: E 的拓扑对偶 $E^* = \mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ 与实数可和序列的空间 $I^1(\mathbb{R})$ 等同, $I^1(\mathbb{R})$ 中的范数待确定.

(b) 应用上述同样方法, 证明: 在 E^* 上连续线性形式的向量空间 E^{**} 与有界实数的所有序列 $z = (\zeta_n)_{n\geqslant 0}$ 构成的空间 $I^\infty(\mathbb{R})$ 等同, 后一空间的范数是

$$\|z\| = \sup_{n\geqslant 0} |\varsigma_n|.$$

习题 3. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 陆续取下列三范数 $\|x\| = (\Sigma x_i^2)^{\frac{1}{2}}, \|x\| = \Sigma|x_i|, \|x\| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|, x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. 在每种情形下, 确定使映射 $x \mapsto \|x\|$ 可微的点所组成的集.

习题 4. 设 $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数所组成的巴拿赫空间, 它的范数是

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

设 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 C^2 类映射. 证明映射 $f \mapsto \int_a^b \varphi(f(x))dx$ 是从 E 到 $\mathbb{R}$ 的可微映射. 这映射总是属于 C^1 类吗?

习题 5. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 及 $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ 是两个非空开集, 并且 f 是从 Ω 到 Ω' 上的一个双射, 且使 f 及 f^{-1} 在 Ω 及 Ω' 内分别可微.

利用复合映射的导出映射, 证明 $n = m$.

习题 6. 设 f 是单实变量、并取实值的凸函数. 证明 f 在每点有左导数及右导数.

习题 7. 设 U 是巴拿赫空间 E 中一个凸开集, 并且 f 是从 U 到 $\mathbb{R}$ 的一个可微映射.

(a) 证明 f 在 U 中是凸的必须而且只须对于任意一对点 $x, x_0 \in U$,

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

(b) 假定 $E = \mathbb{R}^n$, 并且 f 属于 C^2 类; 对于 $x \in U$, 设 φ_x 是由

$$\varphi_x(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}(x) h_i h_j, \qquad h = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$$

确定的二次形式. 证明: f 在 U 中是凸的必须而且只须对于任何 $x \in U$, φ_x 是正的, 亦即对于 $x \in U$ 及 $h \in \mathbb{R}^n, \varphi_x(h) \geqslant 0$.

习题 8. 设 f 是在巴拿赫空间 E 中取值、并在开区间 I 内属于 C^1 类的映射. 令 $\begin{cases} g(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}, & \text{如果 } x \neq y; \\ g(x,x) = f'(x). \end{cases}$

(a) 证明 g 在 $I \times I$ 内连续, 并且在 $I \times I - \bigcup_{x \in I} \{x, x\}$ 内属于 C^1 类.

(b) 如果 $f''(x_0)$ 在 $x_0 \in I$ 存在, 证明 g 在 (x_0, x_0) 可微. (对下列映射应用有限增量定理

$$f(x) - xf'(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0).)$$

习题 9. 设 U 是巴拿赫空间中一个凸开集, 并且 f 是在 U 内取实数值的可微凸映射. 证明如果在一点 $x_0 \in U, f'(x_0) = 0$, 那么 f 在 x_0 有一绝对极小.

习题 10. 设 f 是从闭区间 $[a, b]$ 到巴拿赫空间 E 中的连续映射. 并且在区间 $[a, b[$ 中每一点有连续右导出映射. 把有限增量定理应用于映射 $g(t) = f(t) - (t - t_0) f'_{\mathrm{d}}(t_0)$, 证明 f 在 $]a, b[$ 中属于 C^1 类.

习题 11. 设 f 是从区间 $]a, b[$ 到巴拿赫空间 E 的 C^1 类映射. 证明如果 f 在 $t_0 \in]a, b[$ 有二阶导出映射, 那么当 $h, k \to 0$ 时,

$$\frac{1}{hk}[f(t_0 + h + k) - f(t_0 + h) - f(t_0 + k) + f(t_0)]$$

趋近于 $f''(t_0)$. (引进映射

$$g(u) = f(t_0 + u + k) - f(t_0 + u) - ukf''(t_0),$$

证明: 对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在着 η, 使得由 $|u| < \eta$ 及 $|k| < \eta$ 可导出

$$\|g'(u)\| \leqslant \varepsilon(2|u| + |k|).)$$

习题 12. 设 U 是巴拿赫空间 E 中一个凸开集, 并且设 $f : U \to F$ 是在巴拿赫空间 F 中取值的可微映射. 证明如果导出映射 $f' : U \to \mathscr{L}(E; F)$ 是常量, 那么 f 是一个常量及一个连续线性映射的和.

习题 13. 证明下列性质: 如果 U 是 n 个巴拿赫空间的积 $E_1 \times \cdots \times E_n$ 中一个开集, 如果 $f : U \to F$ 在 U 中任何点有偏导出映射 $\partial f/\partial x_i$, 并且如果映射 $\partial f/\partial x_i : U \to \mathscr{L}(E_i; F)$ 在点 a 连续, 那么 f 在 a 严格可微 (参看 3.8).

习题 14. 设 f 是从巴拿赫空间的一个开集 U 到一个巴拿赫空间 F 的映射. 假定在与某一点 $a \in U$ 不同的任何点 $x \in U, f$ 可微, 并且当 x 趋近于 a 时, 从 U 到 $\mathscr{L}(E; F)$ 映射 $x \mapsto f'(x)$ 有一极限, 证明 f 在 a 严格可微 (参看 3.8), 并且

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x).$$

习题 15. 设 f 是从闭区间 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ 到巴拿赫空间 E 的一个连续映射; 假定 f 在任何点 $x \in]a, b[$ 有右导出映射. 证明存在着 $\xi \in]a, b[$, 使得

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant (b - a)\|f'_{\mathrm{d}}(\xi)\|.$$

[令 $k = \|f(b) - f(a)\|/(b - a) > 0$, 假定对于任何点 $x \in]a, b[, \|f'_{\mathrm{d}}(x)\| < k$. 于是存在着 $x_0 \in]a, b[$ 及 $h > 0$, 使得 $\|f(x_0 + h) - f(x_0)\| < kh$; 对闭区间 $[a, x_0]$ 及 $[x_0 + h, b]$ 应用有限增量定理, 就要得到一个矛盾.]

习题 16. (经典有限增量定理).

(a) 设函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上确定、连续、取实数值, 并且在 $]a, b[$ 内可导, 还满足 $f(a) = f(b) = 0$. 证明存在着 $c \in]a, b[$, 使得 $f'(c) = 0$ (罗尔定理).

(b) 设函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上确定、连续、取实数值, 并且在 $]a, b[$ 内可导, 证明存在着 $c \in]a, b[$, 使得

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

(经典的有限增量定理).

(c) 证明: 对于实数 a 及 $b, a \neq b$, 不存在任何实数 c, 使得

$$e^{ib} - e^{ia} = i(b - a)e^{ic}.$$

由此得: 经典的有限增量定理不能应用于向量值映射.

习题 17. (a) 设函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上确定、取实数值、连续, 并且在 $]a, b[$ 内可导. 应用经典的有限增量定理 (参看习题 16), 证明如果对于任何 $x \in]a, b[, |f'(x)| \geqslant \alpha$, 那么我们有 $|f(b) - f(a)| \geqslant \alpha(b - a)$.

(b) 证明: 如果在 (a) 中, 把导数换成右导数, 或者如果考虑向量值映射 [可考虑 $f = (f_1, f_2)$, 其中 $f_1 = a \cos x, f_2 = a \sin x$], 那么 (a) 中的结果不继续成立.

(c) 证明对于取实数值、并满足 (a) 中假设的函数, 取 $x_0 \in]a, b[$, 导数 $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 对 $x \to x_0$ 的附贴值 [可把 (a) 中结果应用于函数 $g(x) = f(x) - (x - x_0)f'(x_0)$].

(d) 证明对于取向量值的映射, 这结果不正确.

考虑确定如下的映射 $f = (f_1, f_2)$

$$\begin{cases} f_1(x) = x^2 \sin 1/x \text{ 对于 } x \neq 0, & f_1(0) = 0; \\ f_2(x) = x^2 \cos 1/x \text{ 对于 } x \neq 0, & f_2(0) = 0, \end{cases}$$

证明在 $f'(x)$ 的值组成的集中, $f'(0)$ 是孤立点.

习题 18.　设 E 是巴拿赫空间; 用 F 表示巴拿赫空间 $\mathscr{L}(E; E)$.

(a) 证明: 对任何整数 n, 从 F 到 F 的映射 $x \mapsto x^n$ 属于 C^∞ 类. 由此导出: 映射 $x \mapsto \exp x = \sum\limits_{n \geqslant 0} (x^n/n!)$ 属于 C^∞ 类.

(b) 证明: $x \mapsto \exp x$ 实现从 0 的一个邻域到 1_E 的一个邻域上的一个 C^∞ 微分同胚; 对于与 1_E 充分接近的 y, 逆映射确定如下:

$$y \mapsto -\sum_{n \geqslant 1} \frac{(1_E - y)^n}{n}.$$

习题 19.　设 E 及 F 是两巴拿赫空间, U 是 E 中含原点 O 的一个开集, 并且设

$$A : U \mapsto \mathscr{L}(E; F)$$

是属于 C^1 类的一个映射. $B : U \to F$ 是确定如下的映射:

$$B(x) = A(x) \cdot x.$$

证明: 如果 $A(0) = \text{Isom}(E; F)$, 那么在 E 中存在着 O 的一个邻域 V, 而且在 F 中存在着 O 的一个邻域 W, 使得 B 是从 V 到 W 上的一个 C^1 微分同胚.

习题 20.　设 E 是实希尔伯特空间, 并且 f 是从 E 到它本身的一个 C^1 类映射, 而且对 E 中任何 x 及 $h(\alpha > 0)$,

$$(f'(x) \cdot h | h) \geqslant \alpha (h | h).$$

(a) 把经典的有限增量定理应用到映射

$$\varphi(t) = (f(tb + (1-t)a) | b - a),$$

证明: 对于 $a, b \in E$, 我们有

$$(f(b) - f(a) | b - a) \geqslant \alpha (b - a | b - a).$$

由此导出: f 是闭映射.

(b) 证明 $f'(x)$ 在 E 中有稠密的像, 而且对任何 $x \in E$ 是双射. 由此导出 f' 是开映射.

(c) 证明 f 是从 E 到 E 上的一个 C^1 类微分同胚.

习题 21. 设 E, F_1, F_2, G 是巴拿赫空间, 并且设 B 是从 $F_1 \times F_2$ 到 G 的一个连续双线性映射. 证明: 如果 f 及 g 是从开集 $\Omega \subset E$ 分别到 F_1 及 F_2 的 C^m 类映射, 那么映射 $B(f,g)$ (对 x, 相应地有 $B(f(x),g(x))$) 属于 C^m 类; 对于 $k \leqslant m$, 有公式

$$(B(f,g))^{(k)}(x)(u_1,\cdots,u_k) = \sum_J B_J(x;u_1,\cdots,u_k).$$

(J 表示 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的子集所构成的集).

记号: 设 $(u_1,\cdots,u_k) \in E^k$, 并且设 $J = \{i_1,\cdots,i_p\} \subset \{1,2,\cdots,k\}$. 如果 $K = \{j_1,\cdots,j_{k-p}\}$ 是 J 在 $\{1,\cdots,k\}$ 中的余集, 令

$$B_J(x;u_1,\cdots,u_k) = B(f^{(p)}(x)\cdot(u_{i_1},\cdots,u_{i_p}), g^{(k-p)}(x)\cdot(u_{j_1},\cdots,u_{j_{k-p}})).$$

习题 22. 设 E 及 F 是两个巴拿赫空间, 并且 Ω 是 E 中的一个开集. 考虑从 Ω 到 F 且属于 C^p 类的映射 f, 还设对于 $x \in \Omega, f(x)$ 及所有导出映射 $f^{(k)}(x)(1 \leqslant k \leqslant p)$ 有界. 把所有这样的 f 组成的向量空间记作 $\mathscr{C}^p(\Omega, F)$.

(a) 对于 $f \in \mathscr{C}^p(\Omega, F)$, 令

$$\|f\|_p = \sup_{x\in\Omega}(\|f(x)\| + \|f'(x)\| + \cdots + \|f^{(p)}(x)\|).$$

证明 $\|f\|_p$ 是 $\mathscr{C}^p(\Omega, F)$ 上的一个范数; 对于它, 这空间是完备的.

(b) 证明对于 $p \geqslant 2$, 映射 $f \mapsto f'$ 是从 $\mathscr{C}^p(\Omega, F)$ 到 $\mathscr{C}^{p-1}(\Omega, \mathscr{L}(E,F))$ 的连续线性映射.

习题 23. 设 f 是从心为 x_0 的开区间 I 到巴拿赫空间 E 的 C^∞ 类映射, 假定偶数阶导出映射在 I 内有下列形状的估计式

$$\|f^{(2n)}(x)\| \leqslant M(2n)!k^n,$$

其中 M 及 k 是与 n 无关的常数.

对于奇数阶导出映射, 由此可导出怎样的估计式? 利用这些估计, 证明 f 的泰勒级数在待确定的 x_0 的一个邻域中任何点收敛于 $f(x)$. [利用二阶泰勒公式估计差式 $\varphi(x_0+h)-\varphi(x)$ 及 $\varphi(x_0-h)-\varphi(x)$, 可以证明; 如果 φ 在 $[x_0-h, x_0+h]$ 的一个邻域中是 C^2 类映射, 而且 $\|\varphi(x)\| \leqslant A, \|\varphi''(x)\| \leqslant B$, 那么对于这区间中任何 x, 我们有

$$\|\varphi'(x)\| \leqslant A/h + Bh.]$$

习题 24. (a) 考虑从 $\mathbb{R}^3$ 到它本身的下列映射 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = e^{2y} + e^{2z}, \\ \varphi_2(x,y,z) = e^{2x} - e^{2z}, \\ \varphi_3(x,y,z) = x - y, \end{cases}$$

显示像集 $\varphi(\mathbb{R}^3)$ 的特征, 并且证明 φ 是从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\varphi(\mathbb{R}^3)$ 的一个微分同胚.

(b) 设 $F=(F_1,F_2,F_3)$ 是下列各式确定的从 $\mathbb{R}^3$ 到它本身的映射:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=e^{x-y+2z}+e^{-x+y+2z}, \\ F_2(x,y,z)=e^{2x}+e^{2y}-2\lambda e^{x-y}, \\ F_3(x,y,z)=e^{2x}+e^{2y}-2e^{y-x}. \end{cases}$$

证明 F 可写成这种形式 $F=G\circ\varphi$, 其中 G 是一个待确定的映射. 证明要 F 是从 $\mathbb{R}^3$ 到它的像上的一个微分同胚, 必须而且只须 $\lambda\geqslant 0$.

习题 25. 设 U 是 $\mathbb{R}^2$ 中一个开集.

(a) 设 w 是从 U 到 $\mathbb{R}^2$ 的一个 C^2 类映射, 且满足 $\partial^2 w/\partial u\partial y$ 在 U 中不为零. 证明下列方程组可局部地解出 u 及 v.

$$(1)\begin{cases} x=\dfrac{\partial w}{\partial y}(u,y), \\ v=\dfrac{\partial w}{\partial u}(u,y), \end{cases}$$

并且计算映射 $(x,y)\mapsto(u,v)$ 的雅可比行列式.

(b) 设 $(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$ 是从 U 到 $\mathbb{R}^2$ 的一个 C^1 类映射, 它的雅可比行列式等于 1, 而且 $\partial u/\partial x$ 在 U 内不为零, 证明局部地存在着一个 C^2 类函数 w, 使我们有 $\partial^2 w/\partial u dy\neq 0$ 以及 (1).

(c) 局部定出从 U 到 $\mathbb{R}^2$ 的所有 C^1 类映射 $(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$, 使它们的雅可比等于在 U 内不为零的已给函数 $\varphi(x,y)$, 并且 $\partial u/\partial x\neq 0$.

习题 26. 设 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是 C^m 类的一个映射, 并且

$$F(0)=\frac{\partial F}{\partial x_i}(0)=0,\qquad 1\leqslant i\leqslant n;$$

令 $a_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\partial^2 F/\partial x_i\partial x_j\right)(0)$. 应用例如带积分余项的泰勒公式, 证明存在着 C^{m-2} 类函数 g_{ij}, 满足 $g_{ij}=g_{ji}, g_{ij}(0)=a_{ij}$ 并且

$$F(x)=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)x^i x^j,\qquad x=(x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n.$$

习题 27. 设 E_0 是在 [0,1] 上连续实值函数所组成的向量空间, 它的范数是 $\|f\|_0=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$; E_1 是在 [0,1] 上属于 C^1 类、且满足 $f(0)=0$ 的实值函数所组成的向量空间, 它的范数是 $\|f\|_1=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$.

证明由 $\varphi(f)=f'+f^2$ 所确定的映射 $\varphi:E_1\to E_0$ 是从 E_1 中原点的一个邻域 V 到 E_0 中原点的一个邻域 W 上的一个 C^∞ 微分同胚 (考虑 $\varphi'(0)$). 计算逆映射 $\psi;W\to V$ 的一阶及二阶导出映射.

习题 28. 设 $\varphi: E \to F$ 是巴拿赫空间之间的映射, 而且 φ 在 E 中每条仿射直线上的限制是连续的. 证明: 如果对任何 $x_1, \cdots, x_n \in E$,

$$\Delta_{x_1} \cdots \Delta_{x_n} \varphi$$

是 x 的恒等于零的映射, 那么 φ 是次数 $\leqslant n-1$ 的多项式.

[我们递推进行论证. 对于 $n = 2$, 令 $g(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$; 证明 $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$, 然后用从 $\mathbb{R}$ 到 F 的任何可加连续映射是线性的这一事实. 对于 $n > 2$, 证明映射

$$h(x_3, \cdots, x_n, x) = \Delta_{x_3} \cdots \Delta_{x_n} \varphi(x)$$

是 $(n-1)$ 重线性对称映射 $F(x, x_3, \cdots, x_n)$ 及一常量 (与 x 有关) 的和; 然后比较 $\varphi(y)$ 与多项式 $F(y, \cdots, y)/(n-1)!$].

习题 29. 设 f 是从开区间 $I \subset \mathbb{R}$ 到巴拿赫空间 E 的连续映射.

(a) 假定存在着从 I 到 $\mathbb{R}$ 的两个映射 g_1 及 g_2, 使得当 $h \to 0$ 时,

$$\frac{1}{h^2}\left[f(x+h) - f(x) - hg_1(x) - \frac{h^2}{2}g_2(x)\right]$$

在 I 中所含任何紧集上一致趋近于零.

令

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x),$$
$$\Delta_h \Delta_h f(x) = \Delta_h f(x+h) - \Delta_h f(x).$$

证明当 $h \to 0$ 时,

$$\frac{\Delta_h \Delta_h f(x)}{h^2}$$

在 I 中任何紧集上一致收敛于 $g_2(x)$, 并且 g_2 是连续的.

由此导出; 当 $h \to 0$ 时, $\Delta_h f(x)/h$ 在 I 中任何紧集上一致收敛于 $g_1(x)$, 而且 g_1 是连续的.

证明 f 在 I 中属于 C^2 类.

(b) 证明由下列两式确定的函数

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \sin \dfrac{1}{x} & \text{对于} x \neq 0, \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

在原点有二阶有限展开式, 但 f 在原点不是二次可导. 这样, 只有在任意紧集上有收敛性情形下, 才能由有限展开式存在导出导数存在.

习题 30. 考虑下列各式确定的映射 $\varphi; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$;

$$\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), \begin{cases} u(x, y) = x + f(y), \\ v(x, y) = y + f(x). \end{cases}$$

其中 f 是 C^1 类映射, 并且对于任何 $t \in \mathbb{R}, |f'(t)| \leqslant k < 1$.

(a) 证明映射 φ 是满射. 为此, 证明对任何 $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, 函数

$$\psi(x,y) = (\xi - u(x,y))^2 + (\eta - v(x,y))^2$$

在满足 $\varphi(x_1, y_1) = (\xi, \eta)$ 的点 (x_1, y_1) 有一极小.

(b) 证明 φ 是双射.

习题 31. 设 $M(x,y,z)$ 限于表示下列方程所表示曲面上的点:

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1;$$

求函数 $f(M) = x^2 + y^2 + z^2$ 的极值. 我们可找到 14 个点. 证明其中在坐标轴上的点, f 取极小; 在其余八个点, f 取极大 (可把曲面用参变量表示, 把曲面上每个点的邻域只用两个坐标表示, 于是把曲面方程局部地化成了两个变量的函数).

习题 32. 设 E, F, G 是三个巴拿赫空间, 并且 U 及 V 分别是 E 及 F 中的开集. 考虑两个映射

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} G,$$

其中 f 在点 $a \in V$ 三次可微, g 在 $b = f(a)$ 三次可微 · 令 $h = g \circ f$, 用 7.5 中方法, 证明

$$\begin{aligned} h''' \cdot (x_1, x_2, x_3) = {} & g' \cdot f''' \cdot (x_1, x_2, x_3) + g'' \cdot (f' \cdot x_1, f'' \cdot (x_2, x_3)) \\ & + g'' \cdot (f' \cdot x_2, f'' \cdot (x_3, x_1)) + g'' \cdot (f' \cdot x_3, f'' \cdot (x_1, x_2)) \\ & + g''' \cdot (f' \cdot x_1, f' \cdot x_2, f' \cdot x_3), \end{aligned}$$

其中为了简化, 写出 f' 代替 $f'(a), f''$ 代替 $f''(a)$, 等等.

第二章　微分方程

1.　定义与基本定理

在下面, E 总是表示实域上的巴拿赫空间. 考虑在 E 中取值的实变量 t 的映射; 如果 φ 可微, 它的导出映射 φ' 也看作在 E 中取值的映射 [我们把 E 及 $\mathscr{L}(\mathbb{R};E)$ 看作同一的].

1.1.　一阶微分方程

设 $U \subset \mathbb{R} \times E$ 是一个已给子集; 往往 U 是开集, 但不是必然的; 有时 U 是闭集. 给出连续映射

$$f : U \to E.$$

于是写出 "微分方程"

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.1.1}$$

并且把我们所理解的微分方程的解定义为满足下列两条件的 C^1 类映射

$$\varphi : I \to E$$

(其中 $I \subset \mathbb{R}$ 表示一个区间, 它可能是开的或闭的, 有界或无界的):

(i) 对于任何 $t \in I, (t, \varphi(t)) \in U$;

(ii) 对于任何 $t \in I, \varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

[注意: 一定不要忘记提出条件 (i); 没有这条件, 条件 (ii) 就没有意义了.]

注意.　不必设 φ 属于 C^1 类: 如果 φ 只是可微并且满足 (i) 及 (ii), 那么由于 $f(t, \varphi(t))$ 是连续映射的复合映射, 它是 t 的连续映射, 从而导出映射 φ' 当然是 t 的连续映射.

$E = E_1 \times \cdots \times E_n$ 是巴拿赫空间的 (有限) 乘积情形. 于是

$$U \subset \mathbb{R} \times E_1 \times \cdots \times E_n,$$

并且 f 是映射 $f(t, x_1, \cdots, x_n)$, 其中对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant n), x_i \in E_i$; f 由已给 n 个映射 $f_1, \cdots f_n$ 确定, 其中 $f_i : U \to E_i$ 方程的解由满足下列两条件的 C^1 类映射

$$\varphi_i : I \to E_i$$

所确定:

(i) 对于任何 $t \in I, (t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) \in U$;

(ii) 对于任何 $t \in I, \varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))(1 \leqslant i \leqslant n)$.

实际上, 我们有含 n 个一阶微分方程的方程组, 其中有 n 个 t 的未知函数, 这方程组可写作

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \cdots, x_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{1.1.2}$$

特别地, 设对于 $1 \leqslant i \leqslant n, E = \mathbb{R}^n, E_i = \mathbb{R}$. 于是我们有含 n 个纯量微分方程的方程组 (1.1.2); 已给函数 f_i 及未知函数 $x_i = \varphi_i(t)$ 取纯量值. 这种方程组的研究回复到一个向量方程的研究.

1.2. n 阶微分方程

这种方程可写作

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right). \tag{1.2.1}$$

这里 f 是已给的连续映射, $U \to E$, 其中 $U \subset \mathbb{R} \times \underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ 个 } E}$; 方程的解是满足下列两条件的 C^n 类映射 $\varphi : I \to E$:

(i) 对于任何 $t \in I, (t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in U$;

(ii) 对于任何 $t \in I, \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(n-1)}(t))$.

求 (1.2.1) 的解与求含 n 个一阶方程的下列方程组的解等价:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x_1, \\ \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_{n-2}}{dx} = x_{n-1}, \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt} = f(t, x, x_1, \cdots, x_{n-1}). \end{cases}$$

这样就不要求 C^n 类的未知映射 $\varphi : I \to E$, 而是回到求一组属于 C^1 类的 n 个映射 $\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1} : I \to E$, 使得

$$\varphi'(t) = \varphi_1(t), \varphi_1'(t) = \varphi_2(t), \cdots, \varphi_{n-2}'(t) = \varphi_{n-1}(t),$$
$$\varphi_{n-1}'(t) = f\left(t, \varphi(t), \varphi_1(t), \cdots, \varphi_{n-1}(t)\right).$$

于是 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}$ 是 φ 的逐阶导出映射.

因此 n 阶微分方程的研究终于化成了一阶微分方程的研究 (把 E 换成 $E^n = \underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ 个 } E}$).

于是此后我们特别要考虑一阶方程, 但是不要忘记把对一阶方程所得结果移送到 n 阶情形. 例如我们将证明: 在某些假设下 (对已给映射 f, 假设满足李普希茨条件), 给出 U 中一个内点 (t_0, x_0), 存在着 $\varepsilon > 0$, 使得在区间 $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] = I'$ 中, 微分方程 (1.1.1) 有一个并且只有一个解 $\varphi : I' \to E$ 满足初始条件 $\varphi(t_0) = x_0$. 如果我们把这结果 "移送" 到 n 阶方程, 就得到: 已给 U 中一个内点

$$\left(t_0, x_0, x_0', \cdots, x_0^{(n-1)}\right),$$

存在着 $\varepsilon > 0$, 使得在区间 $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] = I'$ 中, 微分方程 (1.2.1) 有一个并且只有一个解 $\varphi : I' \to E$ 满足 "初始条件"

$$\varphi(t_0) = x_0, \varphi'(t_0) = x_0', \cdots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$$

[在 $t = t_0$, 给出了 φ 以及它的一直到 $(n-1)$ 阶导出映射的值].

1.3. 近似解

再考虑微分方程 (1.1.1). 设 $\varepsilon > 0$; 如果 C^1 类映射.

$$\varphi : I \to E$$

满足下列条件:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \text{对于任何 } t \in I, (t, \varphi(t)) \in U; \\ &\text{(ii)} \quad \text{对于任何 } t \in I, \| \varphi'(t) - f(t, \varphi(t)) \| \leqslant \varepsilon, \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

那么 φ 就叫做方程的误差不超过 ε 的近似解, 或 ε 近似解.

我们立即把这概念推广到映射 $\varphi : I \to E$ 只是属于分段 C^1 类情形. 为了简化, 假定 I 是紧区间; 那么 I 是有限个相邻接的紧区间 I_k 的并集 (即 I_{k-1} 的终点与 I_k 的起点重合), 而且 φ 在每个 I_k 上的限制属于 C^1 类. 那么我们要求 φ 还是满足 (1.3.1), 但应理解不等式 (ii) 必须在每个区间 I_k 中成立. 换句话说, 导出映射 φ' 在 I 中有有限个不连续点; 在每个不连续点 $t \in I$, 我们只要求

$$\| \varphi_{\mathrm{d}}'(t) - f(t, \varphi(t)) \| \leqslant \varepsilon, \quad \text{并且} \ \| \varphi_{\mathrm{g}}'(t) - f(t, \varphi(t)) \| \leqslant \varepsilon$$

(关于右导出映射及左导出映射的条件).

现在证明近似解的存在性定理:

定理 1.3.1. 设 $B(x_0,r)\subset E$ 是心为 $x_0\in E$, 半径为 $r>0$ 的闭球 $\| x-x_0 \|\leqslant r$. 设 I 是一紧区间 $\subset\mathbb{R}$, 并且 $t_0\in I$. 假定已给一连续映射.

$$f: I\times B(x_0,r)\to E,$$

并且假定对于 $t\in I, \| x-x_0 \|\leqslant r$,

$$| f(t,x) |\leqslant M \quad (M \text{ 是固定的有限数}). \tag{1.3.2}$$

设 J 是 I 与下列线段:

$$t_0-\frac{r}{M}\leqslant t\leqslant t_0+\frac{r}{M}.$$

的交集, 那么对于任何 $\varepsilon>0$, 微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t)$$

有一分段 C^1 类的 ε 近似解 $\varphi: J\to B(x_0,r)$, 而且 $\varphi(t_0)=x_0$. 我们甚至可选取分段线性的 φ.

证. 只须在 J 中由 $t\geqslant t_0$ 及 $t\leqslant t_0$ 所确定的线段上分别作出 φ. 例如对 $t\geqslant t_0$ 情形进行讨论. 于是我们回到 I 是线段

$$t_0\leqslant t\leqslant T$$

情形, 这线段的长 $T-t_0\leqslant r/M$; 正是这不等式才使在整个 I 中作出 φ 成为可能. 首先考虑在 I 中唯一的仿射线性映射 $\varphi_0: I\to E$, 它满足 $\varphi_0(t)=x_0, \varphi_0'(t_0)=f(t_0,x_0)$; 这映射就是

$$\varphi_0(t)=x_0+(t-t_0)f(t_0,x_0). \tag{1.3.3}$$

既然对于任何 $t\in I, t-t_0\leqslant\dfrac{r}{M}$, 于是

$$\| \varphi_0(t)-x_0 \|\leqslant \frac{r}{M}M.$$

从而 φ_0 正好在球 $B(x_0,r)$ 中取值. 只要我们有: 对于 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$,

$$\| f(t_0,x_0)-f(t,x_0+(t-t_0)f(t_0,x_0)) \|\leqslant\varepsilon, \tag{1.3.4}$$

φ_0 就是闭区间 $[t_0,t_1]$ 中的 ε 近似解. 由于 f 的连续性, 在任何情况下, 上列不等式当 t 充分接近于 t_0 时成立. 如果这不等式偶然在整个 I 中、即在 $t_0\leqslant t\leqslant T$ 时成立. 那么 φ_0 是 I 中的 ε 近似解, 且满足 $\varphi(t_0)=x_0$; 于是就得到要求的结果. 如果不然, 就有起点是 t_0 的更大的闭区间 $[t_0,t_1]$, 在其中 (1.3.4) 成立: 因为如果 t_1 是使得 (1.3.4) 不成立的 t 的下确界, 那么 (1.3.4) 在 $t_0\leqslant t<t_1$ 成立, 而由连续性, (1.3.4) 在 $t=t_1$ 也成立. 令 $\varphi_0(t_1)=x_1$; 我们有 $x_1-x_0=(t_1-t_0)f(t_0,x_0)$, 因此

由 $t_1 - t_0 < T - t_0 \leqslant r/M$, 得 $\| x_1 - x_0 \| < r$. 令 $r_1 = r - \| x_1 - x_0 \|$, 那么对于 $t_1 \leqslant t \leqslant T, \| x - x_1 \| \leqslant r_1$, f 是确定的并且连续的; 总有 $\| f(t, x) \| \leqslant M$, 而且有

$$T - t_1 \leqslant \frac{r_1}{M} \quad (\text{可立即证明}). \tag{1.3.5}$$

因此我们遇到了 t_1 与 x_1, 和我们遇到 t_0 与 x_0 时情形类似. 于是可以开始按同样的步骤进行: 对于 $t_1 \leqslant t \leqslant T$ 中确定的仿射线性映射

$$\varphi_1(t) = x_1 + (t - t_1) f(t_1, x_1)$$

在 $B(x_1, r_1)$ (因而在 $B(x_0, r_0)$) 中取值. 存在着一个最大的闭区间 $[t_1, t_2]$ (其中 $t_1 < t_2 \leqslant T$), 在这闭区间中, 下列不等式成立:

$$\| f(t_1, x_1) - f(t, x_1 + (t - t_1) f(t_1, x_1)) \| \leqslant \varepsilon.$$

如果 $t_2 = T$, 映射 φ, 在 $[t_0, t_1]$ 中等于 φ_0, 在 $[t_1, t_2]$ 中等于 φ_1; 这映射就是微分方程在闭区间 $[t_0, T]$ 中的 ε 近似解; 于是我们得到了要求的解. 相反地, 如果 $t_2 < T$, 重新进行同样的步骤: 令 $\varphi_1(t_2) = x_2$; 因为 $t_2 - t_1 < T - t_1 \leqslant r_1/M$ (见 (1.3.5)), 我们有 $\| x_2 - x_1 \| \leqslant r_1$. 令 $r_2 = r_1 - \| x_2 - x_1 \|$, 就有 $T - t_2 \leqslant r_2/M$, 等等.

这样我们递推确定一个增序列 $t < t_1 < \cdots < t_n \leqslant T$, 一个序列 $x_0, x_1, \cdots, x_n \in \boldsymbol{E}$, 以及分别在 $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{n-1}, t_n]$ 中确定、在 $B(x_0, r)$ 中取值的线性仿射映射 $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}$; 这些 φ_i 在公共端点 $t_1, \cdots, t_{n-1}$ 处衔接, 构成连续、分段线性映射 $\varphi : [t_0, t_n] \to B(x_0, r)$, 它是微分方程的 ε 近似解. 如果对适当的 $n, t_n = T$, 定理得证.

剩下来要考虑对任何 n, $t_n < T$ 情形, 而上述步骤要无限进行下去. 可是我们要证明这种情形不可能出现. 用反证法: 假定上述步骤可无穷进行下去, 并且设 t' 是严格增序列 $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots$ 的上确界. 显然有

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant M(t_{n+1} - t_n),$$

因此序列 $\{x_n\}$ 是一柯西序列 (容易证明). 既然球 $\| x - x_0 \| \leqslant r$ 是闭的, $\{x_n\}$ 有一极限 $x' \in B(x_0, r)$. 对于 $t_n \leqslant t \leqslant t'$, 我们有

$$\varphi_n(t) - x_n = (t - t_n) f(t_n, x_n),$$

因此对于 $t_n \leqslant t \leqslant t', \| \varphi_n(t) - x_n \| \leqslant M(t' - t_n)$, 从而

$$\| \varphi_n(t) - x' \| \leqslant \| x' - x_n \| + M(t' - t_n). \tag{1.3.6}$$

由于 f 在点 (t', x') 连续, 存在着 $\eta > 0$, 使得 $| t - t' | < \eta$ 及 $| x - x' | < \eta$ 时, $\| f(t', x') - f(t, x) \| \leqslant \varepsilon/2$. 因此如果 n 充分大, 由 (1.3.6), 就有: 对于 $t_n \leqslant t \leqslant t'$,

$$\| f(t', x') - f(t, \varphi_n(t)) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

并且

$$\| f(t',x') - f(t_n,x_n) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

比较后就得到: 对于 $t_n \leqslant t \leqslant t'$,

$$\| f(t_n,x_n) - f(t,\varphi_n(t)) \| \leqslant \varepsilon,$$

从而 φ_n 是在 $[t_n,t']$ 中的 ε 近似解. 由 t_{n+1} 的定义, 由此得 $t_{n+1} \geqslant t'$. 然而这是荒谬的, 因为 $t' \geqslant t_{n+2} > t_{n+1}$. 这样我们得到了一个矛盾, 定理 1.3.1 证完.

注意. 已给开集 $U \subset \mathbb{R} \times E$, 一点 $(t_0,x_0) \in U$ 以及一个连续映射 $f: U \to E$. 那么存在着 $\tau > 0, r > 0, M > 0$, 使得满足

$$| t - t_0 | \leqslant \tau, \| x - x_0 \| \leqslant r$$

的任何 (t,x) 含在 U 内, 并且对于这些元素对 $(t,x), | f(t,x) | \leqslant M$. 设 α 是数 τ 及 r/M 中最小的数; 定理 1.3.1 告诉我们: 在紧区间 $| t - t_0 | \leqslant \alpha$ 中, 对任何 $\varepsilon > 0$, 微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

有分段线性 ε 近似解 $x = \varphi(t)$ 满足 $\varphi(t_0) = x_0$. 这结果对充分小的 α 成立; 这种 α 不依赖于 ε.

1.4. 例: 线性微分方程

定义. (一阶) 线性微分方程是有下列形状的方程:

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + B(t), \tag{1.4.1}$$

其中 $A: I \to \mathscr{L}(E;E)$ 及 $B: I \to E$ 是区间 $I \subset \mathbb{R}$ 中给出的连续映射. 于是对于每个 $t \in I, f(t,x) = A(t) \cdot x + B(t)$ 是 $x \in E$ 的连续仿射线性映射; 这映射连续依赖于 t (即 $A(t)$ 与 $B(t)$ 连续依赖于 t). 这里子集 $U \subset \mathbb{R} \times E$ 是 $I \times E$.

设已给 $t_0 \in I$ 及 $x_0 \in E$. 我们要把定理 1.3.1 应用到闭球 $B(x_0,r)$, 其中半径 r 是任意的. 要证明由定理 1.3.1 可导出下列结果.

定理 1.4.1. 如果区间 I 是紧的, 那么对于任何 $\varepsilon > 0$, 存在着方程 (1.4.1) 的一个 ε 近似解 $\varphi: I \to E$ 满足 $\varphi(t_0) = x_0$. [可取 φ 为分段线性的].

以上叙述中重要的是: φ 在整个 I 中存在.

证. 范数 $\| A(t) \|$ ($\mathscr{L}(E,E)$ 中的范数) 是 $t \in I$ 的连续函数; 由于 I 是紧的, 它有一上确界. 令

$$\alpha = \sup_{t \in I} \| A(t) \|;$$

同样令

$$\beta = \sup_{t \in I} \| B(t) \| .$$

我们有

$$\| f(t,x) \| = \| A(t) \cdot x + B(t) \| \leqslant \alpha \| x \| + \beta;$$

因此如果 $\| x - x_0 \| \leqslant r$, 就有

$$\| f(t,x) \| \leqslant \alpha \| x_0 \| + \beta + \alpha r.$$

于是对于 $t \in I, \| x - x_0 \| \leqslant r$, 我们有

$$\| f(t,x) \| \leqslant M, \text{ 其中 } M = \alpha \| x_0 \| + \beta + \alpha r,$$

因此

$$\frac{M}{r} = \frac{\alpha \| x_0 \| + \beta}{r} + \alpha.$$

已给 x_0, 选取 r 使得 $M/r \leqslant 2\alpha$; 由定理 1.3.1, 在紧区间

$$J = I \cap \left[t_0 - \frac{1}{2\alpha}, t_0 + \frac{1}{2\alpha} \right]$$

中, 存在着一个 (分段线性) ε 近似解满足 $\varphi(t_0) = x_0$.

这第一步结果可使我们找出在整个区间 I 中的分段线性 ε 近似解. 只须分别在 I'($t \in I$ 中满足 $t \geqslant t_0$ 的集) 及 I'' ($t \in I$ 中满足 $t \leqslant t_0$ 的集) 作出解. 例如对 I' 进行推导. 设 T 是 I' 的右端点. 我们方才已找到在 $I' \cap [t_0, t_0 + 1/(2\alpha)]$ 中的 ε 近似解 φ_0, 它满足 $\varphi_0(t_0) = x_0$; 而且可选取 φ_0 为分段线性映射. 如果 $t_0 + 1/(2\alpha) \geqslant T$, 问题就解决了. 否则, 设 $t_1 = t_0 + 1/(2\alpha) < T, \varphi_0(t_1) = x_1$; 我们从 t_1 及 x_1 重新开始, 与上面对 t_0 及 x_0 的作法一样: 在 $I' \cap [t_1, t_1 + 1/(2\alpha)]$ 中, 有一分段线性 ε 近似解 φ_1, 它满足 $\varphi_1(t_1) = x_1$. 如果 $t_1 + 1/(2\alpha) \geqslant T$, 问题就解决了, 因为在 $[t_0, t_1]$ 及 $[t_1, T]$ 中分别等于 φ_0 及 φ_1 的映射 φ 满足问题的要求. 否则重新开始: 令 $t_1 + 1/(2\alpha) = t_2 < T, \varphi_1(t_1 + 1/(2\alpha)) = x_2$. 然而这种运算只会有有限次, 因为对于充分大的 n, $t_n = t_0 + n/(2\alpha) \geqslant T$. 证完.

1.5.　李普希茨情形: 基本引理

回顾一个已知的定义 (第一章, 3.2 段): 设 $f(t,x)$ 在 $U = \mathbb{R} \times E$ 中确定、连续并且在 E 中取值; 如果只要 $(t, x_1) \in U$ 及 $(t, x_2) \in U$, 就有

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leqslant k \| x_1 - x_2 \|, \tag{1.5.1}$$

我们说 $f(t,x)$ 对 x 是 k 李普希茨的.

例如, 如果 $U = I \times V$, V 是 E 中的一个开凸集, 并且如果对每个 $(t,x) \in U$, 偏导出映射 $f'_x(t,x) \in \mathscr{L}(E;E)$ 存在, 并且满足

$$\| f'_x(t,x) \| \leqslant k,$$

那么由有限增量不等式 (第一章, 定理 3.3.2), 不等式 (1.5.1) 成立.

我们要证明如果 f 是 k 李普希茨的, 就可估计微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1.5.2}$$

的两个近似解的差 $\varphi_1(x) - \varphi_2(t)$. 准确地有:

基本引理 1.5.1. 设 $\varphi_1 : I \to E$ 是方程 (1.5.2) 的 ε_1 近似解, 并且 $\varphi_2 : I \to E$ 是 ε_2 近似解; 设 $x_1 = \varphi_1(t_0)$ 及 $x_2 = \varphi_2(t_0)$ 是这两解对于 $t_0 \in I$ 的"初始值". 那么如果 f 对 x 是 k 李普希茨的, 我们有, 对 $t \in I$:

$$\boxed{\| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \| \leqslant \| x_1 - x_2 \| e^{k|t-t_0|} t(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.} \tag{1.5.3}$$

基本引理的证明. 我们要多次用到有限增量不等式. 为了使书写简化, 假定 $t_0 = 0$ (对 t 作平移可化成的情形). 另一方面. 我们在 $t > t_0$ (即 $t > 0$) 情形下证明 (1.5.3); 其他情形在把 t 换成 $-t$ 时可化成这情形.

于是由假设, 下列不等式成立:

$$\| \varphi'_1(t) - f(t, \varphi_1(t)) \| \leqslant \varepsilon_1, \quad \| \varphi'_2(t) - f(t, \varphi_2(t)) \| \leqslant \varepsilon_2,$$

由此立即得

$$\| \varphi'_1(t) - \varphi'_2(t) \| \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \| f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t)) \|;$$

由 (1.5.1), 求得

$$\| \varphi'_1(t) - \varphi'_2(t) \| \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k \| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \| . \tag{1.5.4}$$

[我们记得: 在 φ_1 及 φ_2 属于 C^1 类的每个部分区间中, φ'_1 及 φ'_2 分别表示分段 C^1 类映射 φ_1 及 φ_2 的导出映射.] 令

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \varphi(t),$$

它是分段 C^1 类的. 把有限增量不等式 (第一章, 定理 3.1.1) 应用到 (1.5.4), 我们得到, 对于 $t > 0$,

$$\| \varphi(t) - \varphi(0) \| \leqslant \int_0^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k \| \varphi(\tau) \|) d\tau.$$

然而 $\| \varphi(\tau) \| \leqslant \| \varphi(0) \| + \| \varphi(\tau) - \varphi(0) \|$; 由此得

$$\| \varphi(t) - \varphi(0) \| \leqslant (\varepsilon + k \| \varphi(0) \|)t + k \int_0^t \| \varphi(\tau) - \varphi(0) \| d\tau. \tag{1.5.5}$$

(已令 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$.)

为了书写简化, 令

$$\begin{cases} \| \varphi(t) - \varphi(0) \| = u(t) \geqslant 0 \quad (\text{数值连续函数}), \\ \varepsilon + k \| \varphi(0) \| = a > 0. \end{cases} \tag{1.5.6}$$

于是 (1.5.5) 可写成

$$u(t) \leqslant at + k \int_0^t u(\tau) d\tau \tag{1.5.7}$$

我们要用:

辅助引理. 如果在区间 $[0,T](T > 0)$ 中确定、并且取值 $\geqslant 0$ 的连续函数 $u(t)$ 满足 (1.5.7), 我们有

$$u(t) \leqslant \frac{a}{k}(e^{kt} - 1), \quad \text{对于 } 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.5.8}$$

暂时承认这一辅助引理, 并且完成基本引理的证明: 把 $u(t)$ 及 a 用 (1.5.6) 中取出的它们的值来代替, 得到

$$\| \varphi(t) - \varphi(0) \| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{k} + \| \varphi(0) \| \right) (e^{kt} - 1) \quad \text{对于 } t > 0.$$

由此得

$$\begin{aligned} \| \varphi(t) \| &\leqslant \| \varphi(0) \| + \| \varphi(t) - \varphi(0) \| \\ &\leqslant \| \varphi(0) \| e^{kt} + \frac{\varepsilon}{k}(e^{kt} - 1), \end{aligned}$$

这正好是要证明的不等式 (1.5.3), 因为

$$\varphi(0) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) = x_1 - x_2$$

余下只要证明辅助引理. 令

$$v(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau;$$

因而有 $v'(t) = u(t), v(0) = 0$. 那么 (1.5.7) 可写成

$$v'(t) \leqslant at + kv(t); \tag{1.5.9}$$

这是一个微分不等式. 我们要解这一不等式, 令

$$w(t) = e^{-kt} v(t),$$

由此得

$$w'(t) = e^{-kt}(v'(t) - kv(t)).$$

于是 (1.5.9) 可写成

$$w'(t) \leqslant ate^{-kt}.$$

考虑到 $w(0) = 0$, 由有限增量不等式得

$$w(t) \leqslant \int_0^t a\tau e^{-k\tau} d\tau.$$

可简单地算出上式右边的值:

$$w(t) \leqslant \frac{a}{k^2}(1 - e^{-kt} - kte^{-kt}).$$

由此得

$$v(t) = e^{kt}w(t) \leqslant \frac{a}{k^2}(e^{kt} - 1 - kt).$$

而由 (1.5.7), 我们有 $u(t) \leqslant at + kv(t)$, 由此得

$$u(t) \leqslant at + \frac{a}{k}(e^{kt} - 1 - kt) = \frac{a}{k}(e^{kt} - 1).$$

这就是要证明的不等式 (1.5.8). 证完.

1.6. 基本引理的应用: 唯一性定理

定理 1.6.1. *设 $U \subset \mathbb{R} \times E$, 并且设 $f : U \to E$ 是一连续映射, 对 $x \in E$ 是 k 李普希茨的. 如果我们有方程*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

的两个 (准确的!) 解 φ_1 及 $\varphi_2 : I \to E$, 并且如果 $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ (其中 $t_0 \in I$), 那么映射 φ_1 及 φ_2 在区间 I 中恒等.

证. 应用基本引理中的不等式 (1.5.3): 在这里, $x_1 = x_2, \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0$. 我们得到: 对于 $t \in I$,

$$\| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \| = 0.$$

证完.

1.7. 李普希茨情形下的存在定理

定理 1.7.1. *设 $U \to \mathbb{R} \times E$ 是一闭集; 设 $f : U \to E$ 是一连续映射, 对 x 是 k 李普希茨的. 另一方面, 设 $(t_0, x_0) \in U$, 并且设 $I \subset \mathbb{R}$ 是含 t_0 的紧区间. 假定任给 $\varepsilon > 0$, 在 E 中存在着微分方程*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

的一个分段 C^1 类的 ε 近似解 $\varphi: I \to E$ 满足 $\varphi(t_0) = x_0$ [参看例如定理 1.3.1, 其中给出了这种近似解存在的一个充分条件]. 那么在 I 中存在着微分方程的一个准确解满足 $\varphi(t_0) = x_0$.

我们记得由定理 1.6.1, 这样的准确解是唯一的.

证. 给出数 $\varepsilon_n > 0$ 的序列; 当 $n \to +\infty$ 时, 这序列趋近于 0. 设 $\varphi_n : I \to E$ 是满足 $\varphi_n(t_0) = x_0$ 的 ε_n 近似解. 由基本引理 1.5.1, 我们有, 对于任何 $t \in I$

$$\| \varphi_n(t) - \varphi_p(t) \| \leqslant (\varepsilon_n + \varepsilon_p) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.$$

设 k 是当 t 取遍紧区间 I 中的值时,

$$\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}$$

的一个上界, 对于 $t \in I$, 我们有 $\| \varphi_n(t) - \varphi_p(t) \| \leqslant k(\varepsilon_n + \varepsilon_p)$, 由此立即得到: 对于(连续映射 $I \to E$ 的) 一致收敛范数, 映射 φ_n 是一柯西序列. 因此序列 φ_n 有极限 φ: φ 是一连续映射 $I \to E$, 是 φ_n 的一致极限. 由假设, 我们有: 对任何 n, 对任何 $t \in I$,

$$(t, \varphi_n(t)) \in U.$$

由于假设 U 是闭集, 取极限, 我们有: 对于 $t \in I$,

$$(t, \varphi(t)) \in U,$$

并且当然有 $\varphi(t_0) = x_0$. 还要证明 φ 在 I 中可微, 并且对于 $t \in I$,

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

要得到这结果只要证明: 对于 $t \in I$,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau. \tag{1.7.1}$$

然而由假设,

$$\| \varphi_n'(t) - f(t, \varphi_n(t)) \| \leqslant \varepsilon_n.$$

由此得 (有限增量不等式):

$$\| \varphi_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_n(\tau)) d\tau \| \leqslant \varepsilon_n \mid t - t_0 \mid.$$

在这不等式中令 n 趋近于无穷大, 对于 $\tau \in I, f(\tau, \varphi_n(\tau))$ 一致趋近于 $f(\tau, \varphi(\tau))$. 因此在上式中取极限, 就得到要证的关系式 (1.7.1). 证完.

系 1.7.2. (局部存在性定理). 设 V 是

$$(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$$

的一个邻域, 并且设 $f(t,x)$ 是 V 中的连续映射、在 E 中取值、并且对 x 是 k 李普希茨的. 那么存在着一个 $\alpha > 0$ 具有下列性质: 微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

在区间 $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ 中有一个 (并且只有一个) 解 $\varphi : I \to E$, 使得 $\varphi(t_0) = x_0$. 准确地说, 如果 $\tau > 0$ 及 $r > 0$ 选取得充分小, 使得乘积 $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times B(x_0, r)$ 包含在 V 内, 并且对于 $|t - t_0| \leqslant \tau, \| x - x_0 \| \leqslant r$,

$$\| f(t,x) \| \leqslant M,$$

那么可取

$$\alpha = \inf\left(\tau, \frac{r}{M}\right),$$

并且 $\varphi : I \to E$ 在 $B(x_0, r)$ 中取值.

证. 参照 1.3 段末所提出的注意: 在那里我们证明了: 如果 α 及 r 如系中所述选取, 那么对任何 $\varepsilon > 0$, 微分方程在 I 中有 ε 近似解, 它在 $B(x_0, r)$ 中取值, 并且对于 $t = t_0$, 取值 x_0. 于是只须应用定理 1.7.1, 取闭集 $I \times B(x_0, r)$ 作为 U, 就可完成证明.

1.8. f 是局部李普希茨情形

定义. 设 $f : U \to E (U \subset \mathbb{R} \times E)$. 如果对任意点 $(t_0, x_0) \in U$, 在 U 中存在着 (t_0, x_0) 的一个邻域 V 及一个数 $k > 0$, 使得只要 $(t, x_1) \in V, (t, x_2) \in V$, 我们有

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leqslant k \| x_1 - x_2 \|,$$

那么就说 $f : U \to E$ 是*局部李普希茨的*. [换句话说, f 在 V 中的限制对 x 是 k 李普希茨的.]

定理 1.8.1. 如果 $f : U \to E$ 是连续的, 并且是*局部李普希茨的*, 又如果 (t_0, x_0) 是 U 的*内点*, 那么存在着一个 $\alpha > 0$, 使得微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

有一个 (准确) 解 $\varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to E$.

证. 取 (t_0, x_0) 的含在 U 中的一个邻域 V, 使得 f 在 V 中对于 x 是 k 李普希茨的; 把系 1.7.2 应用到 V.

定理 1.8.2. (大范围唯一性定理). 设 $f: U \to E$ 是局部李普希茨映射; I 是一区间 $\subset \mathbb{R}$, 但不一定是紧区间 (I 可以是开区间, 或闭区间, 或半开区间, 有界或无界区间). 如果有微分方程 $dx/dt = f(t,x)$ 的两个 (准确) 解 φ_1 及 $\varphi_2: I \to E$, 并且如果它们对于值 $t_0 \in I$ 相等, 那么它们在整个 I 中恒等.

证. 由于 I 是一连通空间, 只须证明使

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$$

的 $t \in I$ 所组成的集 J 在 I 中同时是开集和闭集. 显然 J 是闭集, 因映射 $\varphi_1 - \varphi_2$ 连续. 为了证明 J 在 I 中是开集, 我们要证明: 如果 $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, 那么存在着 $\alpha > 0$, 使得由 $t \in I$ 及 $|t-t_0| \leqslant \alpha$ 可导出 $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. 设 x_0 是 $\varphi_1(t_0)$ 及 $\varphi_2(t_0)$ 的公有值: 由假设, 存在着 (t_0, x_0) 在 U 中的邻域 V 以及一个数 $k > 0$, 使得 f 在 V 中是 k 李普希茨的. 设 $\alpha > 0$ 使得由 $t \in I$ 及 $|t-t_0| \leqslant \alpha$ 可导出 $(t, \varphi_1(t))$ 及 $(t, \varphi_2(t))$ 在 V 内. 于是唯一性定理 1.6.1 表明: 对于任何 $t \in I \cap [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. **证完.**

还剩下这一问题: 当 f 是局部李普希茨映射时, 方程 $dx/dt = f(t,x)$ 在 $t = t_0$ 取值 x_0 的解的大范围存在性. 准确地说, (t_0, x_0) 是 $U \subset \mathbb{R} \times E$ 中已给内点; 由假设, f 在 U 中是局部李普希茨的. 由定理 1.8.1, 存在着一个含 x_0 的区间 I, 在 I 内有微分方程的一个 (准确) 解 $\varphi: I \to E$, 满足 $\varphi(t_0) = x_0$. 区间 $I \ni t_0$ 及方程满足 $\varphi(t_0) = x_0$ 的解 $\varphi: I \to E$ 形成一对 (I, φ); 先考虑所有这样的对子构成的集 $\mathscr{E}$. 如果 (I_1, φ_1) 及 (I_2, φ_2) 是两个这样的对子, 那么 $I_1 \cap I_2$ 不是空集, 并且由唯一性定理 1.8.2, φ_1 与 φ_2 在 $I_1 \cap I_2$ 中恒等. 设 J 是与 $(I, \varphi) \in \mathscr{E}$ 相应的所有 I 的并集; 在 J 中, 存在着一个、并且只有一个映射 $\varphi: J \to E$ 使得对于任何 $(I, \varphi) \in \mathscr{E}, \psi$ 在 I 中的限制是 φ. 这映射 ψ 显然是微分方程的一个解, 并且 $\psi(t_0) = x_0$. 于是我们证明了

定理 1.8.3. 如果 $f: U \to E$ 是连续的及局部李普希茨的, 并且如果 (t_0, x_0) 是从 U 中给出的一个内点, 那么存在着一个最大的区间 $J \ni t_0$, 在 J 中方程 $dx/dt = f(t,x)$ 有一个解 $\psi: J \to E$, 满足初始条件 $\psi(t_0) = x_0$. [由定理 1.8.2, 这样的 ψ 是唯一的.]

这个解 ψ 叫做对已给 "初始值" (t_0, x_0) 的最大解.

注意. 我们可能以为不能把最大解 "开拓" 到比 J 严格更大的区间中, 是因为已给的 f 只是在 $\mathbb{R} \times E$ 的一个子集上确定的. 然而即令 f 在整个 $\mathbb{R} \times E$ 中是连续的和局部李普希茨的, 不能开拓的情形还是可能出现. 这里举出一个简单的例子, 其中 E 化成数轴 $\mathbb{R}$: 考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \tag{1.8.1}$$

其中 $x(t)$ 是取纯量值的未知函数. 我们可立即证明: 如果 B 是 $\mathbb{R}$ 中的有界子集, 函数 $f(t,x) = x^2$ 在 $\mathbb{R} \times B$ 中是李普希茨的; 因此 $f(t,x) = x^2$ 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 中是局部李普

希茨的. 设 x_0 是解 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 应取的初始值. 如果 $x_0=0$, 由唯一性定理, 对任何 t, 解 $\varphi(t)=0$. 现假定 $x_0\neq 0$; 那么对 0 附近的 $t, x=\varphi(t)$ 是 $\neq 0$, 而且方程 (1.8.1) 可写成

$$\frac{dx}{x^2}=dt;$$

积分后得

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}=t,$$

从而

$$x=\frac{x_0}{1-x_0t}.$$

于是我们有 $\varphi(t)=x_0/(1-x_0t)$; 例如如果 $x_0>0$, 在区间 $-\infty<t<1/x_0$ 内, "最大解" 存在. 当 t 趋近于 $1/x_0$ 时, $\varphi(t)$ 趋近于无穷大.

f 在局部李普希茨情形下, 解的开拓判别法. 假定 U 是开集, $\varphi:[t_0,t_1[\to E$ 是微分方程 $dx/dt=f(t,x)$ 的解; 如果

$$\lim_{\substack{t\to t_1\\ t<t_1}}\varphi(t)$$

存在 (设极限是 x_1), 并且如果 $(t_1,x_1)\in U$, 那么可把 φ 开拓到区间 $[t_0,t_2]$, 其中 $t_2>t_1$. (用证明定理 1.8.2 的推理方法, 容易得到这结果.)

1.9. 线性微分方程情形

在 1.4 段中, 已说到我们所理解的线性微分方程:

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\cdot x+B(t), \tag{1.9.1}$$

其中 A 及 B 是区间 $I\subset\mathbb{R}$ 中的连续映射. 在这里, $f(t,x)=A(t)\cdot x+B(t)$ 是在 $I\times E$ 中确定且连续的. 它是局部李普希茨的, 因为在任何积 $J\times E$ 中 (其中 J 是紧区间 $\subset I$), f 是李普希茨的; 事实上, 我们有

$$f(t,x_1)-f(t,x_2)=A(t)\cdot(x_1-x_2),$$
$$\| f(t,x_1)-f(t,x_2)\|\leqslant k_J\| x_1-x_2\| \quad \text{对于 } t\in J,$$

这里记

$$k_J=\sup_{t\in J}\| A(t)\|.$$

由定理 1.8.3, 对于满足 $t_0\in I$ 的初始值 (t_0,x_0), 方程 (1.9.1) 有一 "最大解". 实际上, 我们有下列定理:

定理 1.9.1. (线性方程的大范围存在定理). *任意取 $t_0\in I$ 及 $x_0\in E$, 方程 (1.9.1) 有一 (准确) 解 $\varphi:I\to E$ 在整个 I 中确定, 并且满足 $\varphi(t_0)=x_0$.* [这解当然是唯一的.]

证. 设 J 是包含在 I 中、并且含 x_0 的一个紧区间. 由定理 1.4.1, 对任何 $\varepsilon > 0$, 在 J 中有一 ε 近似解, 它对 $t = t_0$ 取值 x_0. 于是定理 1.7.1 告诉我们, 在 J 中有满足同一初始条件的准确解. 既然在 I 中包含 (并且含有 t_0) 的任何紧区间中有解, 于是 "最大解" 在整个 I 中确定. 证完.

我们在下面还要详细研究线性微分方程 (第 2 节).

1.10. 对初始值的依赖性

重新设微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.10.1}$$

其中 $f : U \to E$ 是连续的, 而且对 x 是 k 李普希茨的. 设 $t_0 \in I$, 还假定对任何 $u \in A \subset E$, (1.10.1) 必然有在 I 中确定、并且对 $t = t_0$ 取值 u 的 (准确) 解. 设 $\varphi(t.u)$ 是这解. 我们要考察这解怎样依赖于初始值 u.

应用基本引理 1.5.1; 对于 $u, v \in A$, 我们得到:

$$\| \varphi(t, u) - \varphi(t, v) \| \leqslant \| u - v \| e^{k|t-t_0|}$$

设 K 是 $e^{k|t-t_0|}$ 对于 $t \in I$ (假定 I 有界) 的一个上界; 我们有

$$\| \varphi(t, u) - \varphi(t, v) \| \leqslant K \| u - v \|, \tag{1.10.2}$$

由此得:

命题 1.10.1. 在上列假设下, 对 $t = t_0$ 取值 u 的解 $\varphi(t, u)$ 是 u 的一个 K 李普希茨映射, 其中常数 K 与 $t \in I$ 无关.

系 1.10.2. 映射 $\varphi(t, u)$ 是 $(t, u) \in I \times A$ 的连续映射.

事实上, 设已给 u_0; 对于固定的 t, 当 u 趋近于 u_0 时, $\varphi(t, u)$ 趋近于 $\varphi(t, u_0)$; 但由于李普希茨常数 K 与 t 无关, 可以对每个 $\varepsilon > 0$, 连带有一个 $\eta > 0$, 使得无论 t 是什么,

$$\text{由 } \| u - u_0 \| \leqslant \eta \text{ 可导出 } \| \varphi(t, u) - \varphi(t, u_0) \| \leqslant \varepsilon.$$

我们把这一事实表述为: 一致地对于 t, φ 在 u 连续. 待证明的系 1.10.2 可由下列引理推出:

系 1.10.3. (a) 如果映射 $\psi : I \times A \to E$ 分别对 $t \in A$ 及 $u \in A$ 连续, 并且一致地对 $t \in I, \psi$ 在 $u \in A$ 连续, 那么 ψ 是在乘积 $I \times A$ 上的连续映射.

(b) 反过来说, 如果 $\psi : I \times A \to E$ 在 $I \times A$ 上连续, 并且如果 I 是紧集, 那么一致地对于 $t \in I, \psi(t, u)$ 在 u 连续.

更一般地, 如果在这引理中, 把 I 换成任何紧空间, 引理仍然成立.

引理的证明. (a) 设已给 t_0, u_0, 及 $\varepsilon > 0$; 我们有

$$\| \psi(t, u) - \psi(t_0, u_0) \| \leqslant \| \psi(t, u) - \psi(t, u_0) \| + \| \psi(t, u_0) - \psi(t_0, u_0) \|$$

由假设, 存在着 $\eta > 0$, 使得对任何 $t \in I$, 由

$$\|u - u_0\| \leqslant \eta \text{ 可导出 } \|\psi(t, u) - \psi(t_0, u)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2};$$

而且存在着 $\eta' > 0$, 使得由 $|t - t_0| \leqslant \eta'$ 可导出

$$\| \psi(t, u_0) - \psi(t_0, u_0) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{对 } t \text{ 的连续性}).$$

于是只要 $\| u - u_0 \| \leqslant \eta$ 及 $|t - t_0| \leqslant \eta'$, 就有 $\| \psi(t, u) - \psi(t_0, u_0) \| \leqslant \varepsilon$; 这表明了作为 (t, u) 的映射, ψ 是连续的.

(b) 反过来假定 ψ 在 $I \times A$ 上连续, 给出 $u_0 \in A$, 及 $\varepsilon > 0$. 对于每个 $t \in I$, 由假设, 存在着 $\eta(t) > 0$, 使得由

$$|t' - t| < \eta(t) \text{ 及 } \| u - u_0 \| \leqslant \eta(t) \quad \text{可导出}$$
$$\| \psi(t', u) - \psi(t, u_0) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

并且特别有 $\| \psi(t', u_0) - \psi(t, u_0) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; 由此得

$$\| \psi(t', u) - \psi(t', u_0) \| \leqslant \varepsilon. \tag{1.10.3}$$

对每个 $t \in I$, 连带着满足 $|t' - t| < \eta(t)$ 的 t' 所形成的开集. 由于 I 是紧集, 可用有限个这样的区间覆盖 I: 换句话说, 存在着有限个 $t_i \in I$ 及一个 $\eta > 0$, 使得对于任何 $t_i, \eta \leqslant \eta(t_i)$, 并且对于任何 $t' \in I$, (1.10.2) 对 $\| u - u_0 \| \leqslant \eta$ 成立. 这就证明了引理中的结论 (b).

1.11. 微分方程依赖于一个参变量情形

现在要假定映射 $f(t, x)$ 依赖于在拓扑空间 L 中变化的一个参变量 λ. 准确地说, 考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x; \lambda), \tag{1.11.1}$$

其中 f 是一连续映射

$$I \times B(x_0, r) \times L \to E$$

(I 表示一个紧区间, 并且 $B(x_0, r)$ 表示巴拿赫空间 E 中的闭球). 假定

1) $\| f(t, x, \lambda) \| \leqslant M$ 在 $I \times B(x_0, r) \times L$ 上;

2) $\| f(t, x_1, \lambda) - f(t, x_2, \lambda) \| \leqslant k \| x_1 - x_2 \|$ 对于 $t \in I$,

$$\| x_1 - x_0 \| \leqslant r, \quad \| x_2 - x_0 \| \leqslant r, \quad \lambda \in L.$$

[换句话说, f 对 x 是 k 李普希茨的, 而且常数 k 与 t 及 λ 无关.]

如果固定 $\lambda \in L$, 方程 (1.11.1) 有一个 (并且只有一个) 解 $x = \varphi(t)$ 在

$$J = I \cap \left[t_0 - \frac{r}{M}, t_0 + \frac{r}{M}\right]$$

中确定, 并且 $\varphi(t_0)=x_0$. 由定理 1.3.1 及 1.7.1 可得这一结果. 为了表明这解与参变量 λ 的选取有关, 把它记作 $\varphi(t;\lambda)$.

定理 1.11.1. *在上列假设及记号下, $\varphi(t;\lambda)$ 是 $(t,\lambda)\in J\times L$ 的连续映射.*

证. 已知对固定的 $\lambda, \varphi(t;\lambda)$ 对 t 连续. 我们要证明: 一致地对于 $t\in J, \varphi(t,\lambda)$ 对 λ 连续; 这样定理就证明了 (参看引理 1.10.3).

设已给 λ_0. 由于 $\varphi(t;\lambda_0)$ 是方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x;\lambda_0)$$

的解, 我们有

$$\varphi_t'(t;\lambda_0)-f(t,\varphi(t;\lambda_0);\lambda_0)=0, \tag{1.11.2}$$

然而 $f(t,\varphi(t;\lambda_0);\lambda)$ 是 (t,λ) 的连续映射; 由引理 1.10.3(b), 当 λ 趋近于 λ_0 时, 对于 $t\in J$, 这映射一致地趋近于 $f(t,\varphi(t;\lambda_0);\lambda_0)$. 换句话说, 已给 $\varepsilon>0$, 在 L 中存在着 λ_0 的一个邻域 V, 使得对于 $\lambda\in V$ 以及任何 $t\in J$, 我们有

$$\| f(t,\varphi(t;\lambda_0);\lambda)-f(t,\varphi(t;\lambda_0);\lambda_0)\|\leqslant\varepsilon. \tag{1.11.3}$$

比较 (1.11.2), 就得到

$$\|\varphi_t'(t;\lambda_0)-f(t,\varphi(t;\lambda_0);\lambda)\|\leqslant\varepsilon$$

这表明 $\varphi(t;\lambda_0)$ 是方程 (1.11.1) 的一个 ε 近似解; 准确解是 $\varphi(t;\lambda)$, 它对 $t=t_0$ 取同一值 x_0. 由基本引理 1.5.1, 我们有

$$\|\varphi(t;\lambda)-\varphi(t;\lambda_0)\|\leqslant\varepsilon\frac{e^{k|t-t_0|}-1}{k}.$$

由于 $|t-t_0|\leqslant r/M$, 我们有: 只要 $\lambda\in V$(λ_0 的邻域),

$$\|\varphi(t;\lambda)-\varphi(t;\lambda_0)\|\leqslant K\varepsilon \quad (K \text{ 与 } t\in J \text{ 无关}).$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任意选取的, 这样就证明了: 对于 $t\in J, \varphi(t;\lambda)$ 一致地趋近于 $\varphi(t;\lambda_0)$. 证完.

2. 线性微分方程

2.1. 通解的形式

设

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\cdot x+B(t) \tag{2.1.1}$$

是线性微分方程: A 是连续映射 $I\to\mathscr{L}(E;E), B$ 是连续映射 $I\to E$. 已知 (定理 1.9.1) 这方程有唯一解 $\varphi:I\to E$ 满足 $\varphi(t_0)=x_0$ (对于已给的 $t_0\in I$ 及 $x_0\in E$).

定义. 微分方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x \tag{2.1.2}$$

叫做与 (2.1.1) 连带的齐次方程.

显然, 如果 φ 是 (2.1.2) 的解, 并且如果 ψ 是 (2.1.1) 的解, 那么 $\varphi + \psi$ 是 (2.1.1) 的解; 事实上,

$$\varphi'(t) + \psi'(t) = A(t) \cdot \varphi(t) + A(t) \cdot \psi(t) + B(t) = A(t)(\varphi(t) + \psi(t)) + B(t).$$

特别, 设 $\varphi(t; x_0)$ 是齐次方程 (2.1.2) 在 $t = t_0$ 取值 x_0 的解; 并且设 $\psi(t)$ 是 (2.1.1) 在 $t = t_0$ 为零的解. 那么 (2.1.1) 在 $t = t_0$ 取值 x_0 的解是

$$\varphi(t; x_0) + \psi(t).$$

(齐次方程 (2.1.2) 的 "通解" 与方程 (2.1.1) 的一个特解的和).

2.2. 齐次线性方程研究

我们研究方程 (2.1.2). 显然有 (用上列记号)

$$\begin{aligned} &\varphi(t; x_0) + \varphi(t; x_1) = \varphi(t; x_0 + x_1), \\ &\varphi(t; \lambda x_0) = \lambda \varphi(t; x_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

换句话说, 对于 $t = t_0$ (t_0 取定), $\varphi(t; x_0)$ 与初始值 x_0 线性相关.

特别, 对任何 $t, \varphi(t; 0) = 0$. 因此如果一个解 $x = \varphi(t)$ 对一个特别值 $t_0 \in I$ 是零, 那么它在 I 中恒等于零. 作为推论: 假定有 k 个解 $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_k(t)$; 如果有常数 (不全为零) $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, 使得 $\sum\limits_i \lambda_i \varphi_i(t_0) = 0$, 那么对 $t \in I, \sum\limits_i \lambda_i \varphi_i(t) = 0$; 换句话说, k 个解 φ_i 是线性相关的.

$\varphi(t; x_0)$ 对 x_0 线性相关这一事实特别要准确说明. 事实上, 与方程 (2.1.2) [其中未知量是映射 $\varphi : I \to E$] 相连带, 取另一齐次线性微分方程, 其中未知映射 $R(t)$ 在 $\mathscr{L}(E; E)$ 中取值. 这就是方程

$$\frac{dR}{dt} = A(t) \circ R(t). \tag{2.2.1}$$

这种写法的意义是清楚的: 导出映射 $dR/dt = R'(t) \in \mathscr{L}(E; E)$ 必须等于线性映射 $A(t) \in \mathscr{L}(E; E)$ 及 $R(t) \in \mathscr{L}(E; E)$ 的复合映射. 这正是一个齐次线性微分方程: 如果暂时令 $E' = \mathscr{L}(E; E)$, 元素 $A(t)$ 确定一个连续线性映射 $E' \to E'$, 即 $f \to A(t) \circ f$. [对于 $f \in \mathscr{L}(E; E)$]. 如果暂时把 $C(t)$ 叫做 $\mathscr{L}(E'; E')$ 中的元素 (由 $A(t)$ 确定), 由于 $\| A(t) \circ f \| \leqslant \| A(t) \| \cdot \| f \|$, 我们有

$$\| C(t) \| \leqslant \| A(t) \| .$$

由于 $A: I \to \mathscr{L}(E;E)$ 连续, 我们有

$$A(t) = \lim_{t' \to t} A(t'),$$

即

$$\lim_{t' \to t} \|A(t') - A(t)\| = 0.$$

因 $\|C(t') - C(t)\| \leqslant \|A(t') - A(t)\|$, 可见当 t' 趋近于 t 时, $C(t')$ 趋近于 $C(t)$. 换句话说, $C: I \to \mathscr{L}(E';E')$ 正是一连续映射. 证完.

于是微分方程 (2.2.1) 正好属于已研究过的类型, 并且可对它应用解的存在与唯一性定理 (定理 1.9.1). 把 $R(t,t_0)$ 记作 (2.2.1) 的解, 对于 $t = t_0$, 它取值 1_E; 把 $\mathbf{1}_E \in \mathscr{L}(E;E)$ 记作从 E 到 E 的恒等映射. 这样就得到:

定理 2.2.1. 微分方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x \tag{2.1.2}$$

对于 $t = t_0$ 取值 x_0 的解等于

$$R(t,t_0) \cdot x_0,$$

这里 $R(t,t_0)$ 表示 (2.2.1) 对于 $t = t_0$ 取值 1_E 的解.

证. 设 $x(t) = R(t,t_0) \cdot x_0$. 计算导出映射 x':

$$x'(t) = R'(t,x_0) \cdot x_0;$$

由方程 (2.2.1), 上式右边等于

$$(A(t) \circ R(t,t_0)) \cdot x_0 = A(t) \cdot (R(t,t_0) \cdot x_0) = A(t) \cdot x(t).$$

于是 $x(t)$ 正是 (2.1.2) 的解; 对于 $t = t_0$, 它的值是

$$R(t_0,t_0) \cdot x_0 = 1_E \cdot x_0 = x_0. \quad \text{证完.}$$

定义. $R(t,t_0)$ 叫做方程 (2.1.2) 的预解式 (或预解核).

定理 2.2.2. 如果 t_0, t_1 及 t 是 I 中三点, 我们有

$$R(t,t_0) = R(t,t_1) \circ R(t_1,t_0). \tag{2.2.2}$$

证. 暂时把 (2.2.2) 的右边记作 $S(t)$; 我们有

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \left(\frac{d}{dt} R(t,t_1)\right) \circ R(t_1,t_0) \\ &= A(t) \circ R(t,t_1) \circ R(t_1,t_0) = A(t) \circ S(t). \end{aligned}$$

因此映射 $S(t)$ 是方程 (2.2.1) 的解. 对于 $t=t_1$, 它的值是

$$1_E \circ R(t_1,t_0) = R(t_1,t_0).$$

因此 $S(t)$ 是对 $t=t_1$ 取值 $R(t_1,t_0)$ 的解. 于是 (2.2.2) 的左边, 即 $R(t,t_0)$, 也是 (2.2.1) 的解, 它对于 $t=t_1$ 取值 $R(t_1,t_0)$. 由此得不等式 (2.2.2). 证完.

系 2.2.3. *我们有* $R(t,t_0)=\mathrm{Isom}(E;E)$, *并且逆同构是* $R(t_0,t)$.

事实上,

$$R(t_0,t)\circ R(t,t_0) = R(t_0,t_0) = 1_E,$$
$$R(t,t_0)\circ R(t_0,t) = R(t,t) = 1_E.$$

注意. 我们已对实巴拿赫空间 E 进行论证, 算子 $A(t)$ 是 $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E;E)$ 中一个元素. 但是也可作出复的理论: 如果 E 是 $\mathbb{C}$ 上的巴拿赫空间, 考虑连续映射

$$A: I \to \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E;E).$$

因为 $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E;E) \subset L_{\mathbb{R}}(E;E)$, 所以可以应用线性微分方程理论. 但是这里预解式 $R(t,t_0)$ 是 $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E;E)$ 的一个元素, 甚至是 $\mathrm{Isom}(E;E)$ 的一个元素.

2.3. E 有有限维情形

设 n 是 E 的维数. 实际上, 有两种理论: 实的理论, 在其中 E 与 $\mathbb{R}^n$ 同构; 以及复的理论, 在其中 E 与 $\mathbb{C}^n$ 同构. 在两种情形下, 假定选取了 E 的一个基; 那么给出的同态 $A(t)$ 由一个 n 行、n 列的方阵

$$\{a_{ij}(t)\}$$

所确定, 其中各项 $a_{ij}(t)$ 是区间 I 上的连续函数; 这些函数在实的情形下取实数值, 在复的情形下取复数值. 未知映射 $x(t)$ (在 E 中取值) 是由 n 个在 $\mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$) 中取值的函数 $x_i(t)$ 确定的, 并且微分方组 (2.1.2) 变成了含 n 个方程的微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

对于 $t=t_0$, 可给出 n 个未知函数的初始值 $(x_i)_0$. 预解式 $R(t,t_0)$ 由一个方阵

$$\{r_{ij}(t,t_0)\}, \quad 其中\ r_{ij}(t_0,t_0)=\delta_{ij}$$

确定. 由于 $R(t,t_0)$ 是一同构, 这方阵的行列式 $\det R(t,t_0)\neq 0$. 我们将看到这行列式易于从矩阵 $\{a_{ij}(t)\}$ 算出.

为此, 我们记得矩阵 $\{a_{ij}\}$ 的迹或有限维向量空间的同态 A 的定义: 它就是

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad (对角线元素的和),$$

这是与基的选取无关的元素 [我们记得, 事实上, $\mathrm{Tr}(A)$ 是下列特征方程的根的和:

$$\det(A-\lambda 1_E)=0].$$

命题 2.3.1. 我们有

$$\det R(t,t_0)=\exp\int_{t_0}^{t}\mathrm{Tr}(A(\tau))d\tau. \tag{2.3.1}$$

证明这命题与证明下列结果一样: 函数

$$y(t)=\det R(t,t_0)$$

满足微分方程

$$y'(t)=(\mathrm{Tr}(A(t)))\cdot y(t) \tag{2.3.2}$$

及初始条件 $y(t_0)=1$ [显然, 因为 $\det(1_E)=1$].

因此要证明 (2.3.2). 把 $R(t,t_0)$ 写作 $R(t)$. 取 E 的一个基 $(e_1,\cdots,e_n)$; 由 E 的外代数, 我们有:

$$R(t)e_1\wedge\cdots\wedge R(t)e_n=\det(R(t))\cdot e_1\wedge\cdots\wedge e_n.$$

对 t 求导出映射, 上式左边的导出映射是

$$\begin{aligned}R'(t)e_1\wedge R(t)e_2\wedge\cdots\wedge R(t)e_n+R(t)e_1\wedge R'(t)e_2\wedge\cdots\wedge R(t)e_n+\cdots\\+R(t)e_1\wedge\cdots\wedge R(t)e_{n-1}\wedge R'(t)e_n\end{aligned}$$

(多重线性映射的导出映射). 然而由微分方程 (2.2.1), 上式等于

$$\begin{aligned}(A(t)\circ R(t)e_1)\wedge R(t)e_2\wedge\cdots\wedge R(t)e_n+R(t)e_1\wedge(A(t)\circ R(t)e_2)\wedge\cdots\wedge R(t)e_n+\cdots\\+R(t)e_1\wedge\cdots\wedge R(t)e_{n-1}\wedge(A(t)\circ R(t)e_n)\end{aligned}$$

或令 $R(t)e_i=e_i'$ (对于 $i=1,\cdots,n$), 上式等于:

$$\begin{aligned}(A(t)e_1')\wedge e_2'\wedge\cdots\wedge e_n'+e_1'\wedge(A(t)e_2')\wedge\cdots\wedge e_n'+\cdots\\+e_1'\wedge\cdots\wedge e_{n-1}'\wedge(A(t)e_n').\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

设 $\{a_{ij}(t)\}$ 是对于基 $(e_1',\cdots,e_n')$ 的矩阵 $A(t)$. 可立即看出 (2.3.3) 等于

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t)\right)e_1'\wedge\cdots\wedge e_n'&=\mathrm{Tr}(A(t))\cdot R(t)e_1\wedge\cdots\wedge R(t)e_n\\&=\mathrm{Tr}(A(t))\cdot\det(R(t))(e_1\wedge\cdots\wedge e_n).\end{aligned}$$

最后我们证明了

$$\frac{d}{dt}(\det R(t))(e_1\wedge\cdots\wedge e_n)=\mathrm{Tr}(A(t))\cdot\det(R(t))(e_1\wedge\cdots\wedge e_n),$$

由此得

$$\frac{d}{dt}(\det R(t))=\mathrm{Tr}(A(t))\cdot\det(A(t)),$$

这正好是微分方程 (2.3.2).

2.4. “带右端项的” 线性方程

设有微分方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + B(t), \tag{2.4.1}$$

其中 $A(t)$ 及 $B(t)$ 的意义同 2.1 段. 设 $R(t, t_0)$ 是连带齐次方程的预解式 (参看定理 2.2.1). “常数变易法” 中, 要令

$$x(t) = R(t, t_0) \cdot y(t) \tag{2.4.2}$$

并且要取 $y(t)$ 作为未知映射代替 $x(t)$ [由于 $R(t, t_0) \in \mathrm{Isom}(E; E), x(t)$ 及 $y(t)$ 中的一个可确定另一个]. 表达 (2.4.2) 中的 $x(t)$ 满足 (2.4.1), 由于 $R(t, t_0)$ 是方程 (2.2.1) 的解, 我们有

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dR}{dt} \cdot y(t) + R \cdot \frac{dy}{dt} = A(t)[R(t, t_0) \cdot y(t)] + R\frac{dy}{dt}.$$

把上列 dx/dt 的值代入 (2.4.2), 简化后得:

$$R(t, t_0)\frac{dy}{dt} = B(t).$$

由于 $R(t, t_0)^{-1} = R(t_0, t)$, 上式等价于

$$\frac{dy}{dt} = R(t_0, t) \cdot B(t). \tag{2.4.3}$$

这就是要求解的微分方程. 它表明 $y(t)$ 是 $R(t_0, t) \cdot B(t)$ 的原映射; 而由 (2.4.2), 我们有:

$$x_0 = x(t_0) = R(t_0, t_0) \cdot y(t_0) = y(t_0),$$

由此得

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0, \tau) \cdot B(\tau) d\tau.$$

把上式代入 (2.4.2), 并且注意到

$$\begin{aligned} R(t, t_0) \int_{t_0}^{t} R(t_0, \tau) \cdot B(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^{t} (R(t, t_0) \cdot R(t_0, \tau)) \cdot B(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t} R(t, \tau) \cdot B(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

最后得到

$$\boxed{x(t) = R(t, t_0) \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, \tau) \cdot B(\tau) d\tau.} \tag{2.4.4}$$

因此齐次方程的预解式也可用来解 “带右端项的” 方程 (2.4.1). 注意 (2.4.4) 的右边是两个映射的和: 第一个 $R(t,t_0)\cdot x_0$ 是齐次方程的 “通解”, 第二个

$$\int_{t_0}^{t} R(t,\tau)\cdot B(\tau)d\tau \tag{2.4.5}$$

是方程 (2.4.1) 对 $t=t_0$ 为零的解. 这结果与我们在 2.1 段开始时所见到的相符合. 注意 (2.4.5) 表明了这个解与映射 $B(t)$ 线性相关.

2.5. n 阶齐次线性微分方程情形

我们要把前面的结果 “转移” 到 n 阶方程情形. 现从一个齐次线性方程开始:

$$\begin{aligned}\frac{d^n x}{dt^n} &= A_0(t)\cdot x + A_1(t)\cdot\frac{dx}{dt} + \cdots + A_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t)\frac{d^i x}{dt^i}\left(\text{约定 } \frac{d^0x}{dt^0}=x\right),\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

其中 $x(t)$ 是未知映射 $I\to E$(E: 巴拿赫空间), “系数” $A_i(t)$ 是已给连续映射 $I\to\mathscr{L}(E;E)$. $n=1$ 情形已经讨论过 (2.2 段), 要把一般情形化到 $n=1$ 情形, 只要考虑含 n 个齐次线性微分方程的方程组, 其中 n 个未知映射

$$x(t)=x^{(0)}(t), x'(t), x''(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)$$

在 E 中取值; 这方程组是:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x', \dfrac{dx'}{dt}=x'', \cdots, \dfrac{dx^{(n-2)}}{dx}=x^{(n-1)},\\ \dfrac{dx^{(n-1)}}{dt}=A_0(t)\cdot x + A_1(t)\cdot x' + \cdots + A_{n-1}(t)\cdot x^{(n-1)}.\end{cases} \tag{2.5.2}$$

这方程组可看作只是一个方程, 其中未知映射在

$$E^n = E\times\cdots\times E \quad (n \text{ 个 } E)$$

中取值, 这个未知映射 $X(t)$ 的 n 个合成映射是 $x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)$.

于是 (2.5.2) 可写成

$$\frac{dX}{dt}=A(t)\cdot X,$$

其中 $A(t)\in\mathscr{L}(E^n;E^n)$ 是由 n 行、n 列的矩阵确定的 [其中元素在 $\mathscr{L}(E;E)$ 中]:

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1_E & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1_E & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1_E\\ A_0(t) & A_1(t) & A_2(t) & \cdots & A_{n-1}(t)\end{pmatrix}. \tag{2.5.3}$$

设 $R(t,t_0)$ 是预解矩阵; 这是一个 n 行、n 列的矩阵; 把它的第一行中的元素记作

$$R_0(t,t_0), R_1(t,t_0), \cdots, R_{n-1}(t,t_0).$$

对 $t=t_0$ 取值 $X_0=(x_0,x_0',\cdots,x_0^{(n-1)})$ 的解 $X(t)=[x(t),x'(t),\cdots,x^{(n-1)}(t)]$ 给出如下:

$$\begin{aligned} x(t) &= R_0(t,t_0)\cdot x_0 + R_1(t,t_0)\cdot x_0' + \cdots + R_{n-1}(t,t_0)\cdot x_0^{(n-1)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} R_i(t,t_0)\cdot x_0^{(i)}; \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

给出 $x'(t),\cdots,x^{(n-1)}(t)$ 的表达式显然可从 (2.5.4) 对 t 逐次求导得出:

$$\frac{d^j x}{dt^j} = \sum_{i=0}^{n-1} R_i^{(j)}(t,t_0)\cdot x_0^{(i)}, \tag{2.5.5}$$

其中 $R_i^{(j)}(t,t_0)$ 是 $R_i(t,t_0)$ 的 j 阶导出映射. 因此预解矩阵是

$$R(t,t_0) = \left[\frac{d^j R_i}{dt^j}(t,t_0)\right]_{\substack{0\leqslant i\leqslant n-1\\ 0\leqslant j\leqslant n-1}}. \tag{2.5.6}$$

于是方程 (2.2.1) 可写成

$$\boxed{\frac{d^n R}{dt^n} = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t)\circ\frac{d^j R_i}{dt^j},\qquad 0\leqslant i\leqslant n-1,} \tag{2.5.7}$$

并带有初始值

$$\boxed{\frac{d^j R_i}{dt^j}(t_0,t_0) = \delta_{ij}1_E} \tag{2.5.8}$$

上式表明, 对于 $t=t_0$, 矩阵 (2.5.6) 是单位矩阵. 于是每个 $R_i(t,t_0)\in\mathscr{L}(E;E)$ 是 n 阶微分方程 (2.5.7) 的解, 它和它的前 $n-1$ 个导出映射的初始值是由 (2.5.8) 给出的.

现考察 E 是一维向量空间这一特殊情形: 因此在实的或复的情形分别设 $E=\mathbb{R}$ 或 $E=\mathbb{C}\cdot A_i(t)$ 是取纯量值的函数, 记作 $a_i(t)$; 已给的微分方程写作

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\frac{d^i x}{dt^i}, \tag{2.5.9}$$

其中未知函数 $x(t)$ 取纯量值. 于是预解矩阵 $R(t,t_0)$ 是 n 行、n 列的通常矩阵, 矩阵中元素是取纯量值的函数:

$$R(t,t_0) = \left[\frac{d^j r_i}{dt^j}(t,t_0)\right],$$

并且每个函数 $r_j(t)$ 是方程

$$\frac{d^n r_i}{dt^n} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) \frac{d^j r_i}{dt^n}$$

的取初始值 $d^j r_i/dt^j = \delta_{ij}$ (对于 $t = t_0$) 的解. 方程 (2.5.9) 的通解是

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i(t, t_0) \cdot x_0^{(i)}.$$

(2.5.9) 的解成一向量空间; 于是对于一个已给的 $t_0, r_i(t, t_0)$ 形成这个 n 维空间的一个基. 而且我们有

$$\det R(t, t_0) = \det \left[\frac{d^j r_i}{dt^j}(t, t_0) \right].$$

把关系式 (2.3.1) 应用到现在的情形: 在这里我们有

$$\mathrm{Tr} A(t) = a_{n-1}(t),$$

由此得

$$\det \left[\frac{d^j r_i}{dt^j}(t, t_0) \right] = \exp \int_{t_0}^{t} a_{n-1}(\tau) d\tau. \qquad (2.5.10)$$

我们将注意到: 这是把

$$x(t_0), x'(t_0), \cdots, x^{(n-1)}(t_0)$$

变换到

$$x(t), x'(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)$$

[这适用于 (2.5.8) 的任何解 $x(t)$] 的线性变换的行列式. 由此导出: 考虑 (2.5.8) 的 n 个解 $x_1(t), \cdots, x_n(t)$; 那么行列式

$$\det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_1'(t) & \cdots & x_1^{(n-1)}(t) \\ x_2(t) & x_2'(t) & \cdots & x_2^{(n-1)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n(t) & x_n'(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

(叫做这 n 个解的朗斯基行列式) 等于它对于 $t = t_0$ 的值与行列式 (2.5.10) [它是严格正的] 的乘积. 特别, 如果 n 个解的朗斯基行列式对于一个特定的值 t_0 是零, 那么它对任何 t 是零; 这条件表明存在着一个线性关系式

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) = 0,$$

其中常系数 c_i 不全是零.

2.6. “带右端项的” n 阶线性微分方程

这是一个方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t) \frac{d^i x}{dt^i} + B(t), \tag{2.6.1}$$

其中未知映射 $x: I \to E$ 在巴拿赫空间 E 中取值, 已给映射 $A_i(t)$ 是连续映射 $I \to \mathscr{L}(E;E)$, 并且 $B(t)$ 是已给连续映射 $I \to E$. 把 2.4 段中结果应用到方程组

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \cdot X + C(t),$$

其中矩阵 $A(t)$ 由 (2.5.3) 给出, 并且

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ B(t) \end{pmatrix}.$$

于是 (2.6.1) 的通解是连带齐次方程的通解 [公式 (2.5.4)] 及 (2.6.1) 的一个解的和: 这解本身和它的前 $n-1$ 个导出映射对于 $t = t_0$ 都是零. 如果转述 (2.4.4), 这个解可写成

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} R_{n-1}(t, \tau) \cdot B(\tau) d\tau}. \tag{2.6.2}$$

我们记得 (参看关系式 (2.5.7) 及 (2.5.8)) $R_{n-1}(t, \tau)$ 是微分方程

$$\frac{d^n S}{dt^n} = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t) \circ \frac{d^j S}{dt^j}$$

满足下列条件的唯一解: 它在 $\mathscr{L}(E;E)$ 中取值, 它本身和它的前 $n-2$ 个导出映射对于 $t = \tau$ 都是零, 并且它的 $(n-1)$ 阶导出映射 $d^{n-1}S/dt^{n-1}$ 对于 $t = \tau$ 取值 1_E. 有了这些明确解释, 就可把表达式 (2.6.2) 看作解出了带右端项的方程 (2.6.1).

我们给出两个实例.

例 1. 考虑微分方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} = B(t),$$

并且求这样的解 ($B(t)$ 的 “n 阶原映射”): 它本身和它的前 $n-1$ 个导出映射对于 $t = t_0$ 都是零. 显然

$$S(t) = \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot 1_E$$

本身和它的前 $n-2$ 个导出映射对于 $t=\tau$ 是零, 而它的 $(n-1)$ 阶导出映射等于 1_E; 它满足方程 $d^n x/dt^n = 0$. 因此所求的解是

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} B(\tau) d\tau}.$$

[我们没有写 1_E, 因 $1_E \cdot B(\tau) = B(\tau)$]. 因此求 n 阶原映射只需要作一个简单积分的计算.

例 2. 考虑二阶微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = B(t).$$

下列映射和它的一阶导出映射, 对于 $t = t_0$ 都是零:

$$\int_{t_0}^{t} \sin(t-\tau) B(\tau) d\tau;$$

这映射是上列方程的解. 事实上, 映射 $S(t) = \sin(t-\tau) \cdot 1_E$ 满足

$$\frac{d^2 S}{dt^2} + S = 0.$$

它对于 $t=\tau$ 是零, 并且它的导出映射等于 1_E.

2.7. 常系数线性微分方程

现在研究已给映射 $A : I \to \mathscr{L}(E;E)$ 是常量的特殊情形. 首先考虑齐次线性方程

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x, \tag{2.7.1}$$

其中 $A \in \mathscr{L}(E;E)$ 是已给的. 这里可以取 $I = \mathbb{R}$; 预解式 $R(t,0) = R(t)$ 是映射 $\mathbb{R} \to \mathscr{L}(E;E)$, 它是微分方程

$$\frac{dR}{dt} = A \circ R, \tag{2.7.2}$$

的满足初始条件 $R(0) = 1_E$ 的解. 现要把这映射明显作出. 在第一章中 (参看定理 1.7.1), 已经作出指数映射的定义: 对于 $A \in \mathscr{L}(E;E)$,

$$\exp A = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} A^n \tag{2.7.3}$$

[约定 $A^0 = 1_E$]. 由于

$$\|A^n\| \leqslant \|A\|^n,$$

前式右边是正规收敛级数. 现要证明: 如果令

$$R(t) = \exp(tA) \quad (\text{对于 } t \in \mathbb{R}),$$

这样确定的 $R(t)$ 满足 (2.7.2); 因显然有 $R(0)=1_E, R(t)$ 正好是要求的预解式.

我们有

$$R(t)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}A^n. \tag{2.7.4}$$

这是 $t\in\mathbb{R}$ 的幂级数的和, 级数的 "系数" 在 $\mathscr{L}(E;E)$ 中. 由幂级数求导的定理, $R(t)$ 有导出映射 $R'(t)$, 它等于 (2.7.4) 右边的级数逐项求导而得幂级数的和:

$$R'(t)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n=\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}A^{n+1}$$

我们可取 A 作为因子 (例如作为左因子):

$$R'(t)=A\circ\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}A^n\right)=A\circ R(t).$$

证完.

总之, (2.7.1) 对于 $t=t_0$ 取值 x_0 的解是

$$\boxed{x(t)=\exp((t-t_0)A)\cdot x_0}\ . \tag{2.7.5}$$

我们注意关系式 (2.2.2) 在这里可写成

$$\exp((t-t_0)A)=\exp((t-t_1)A)\circ\exp((t_1-t_0)A),$$

而且我们知道

$$\exp((t_1+t_2)A)=\exp(t_1A)+\exp(t_2A),$$

因为只要自同态 A_1 及 A_2 可交换: $A_1\circ A_2=A_2\circ A_1$, 更一般有

$$\exp(A_1+A_2)=(\exp A_1)\circ(\exp A_2).$$

更特别, 关系式 $\exp(tA)\circ\exp(-tA)=1_E$ 表明 $\exp(tA)\in\operatorname{Isom}(E;E)$.

设有一种 "带右端项的" 微分方程:

$$\frac{dx}{dt}=A\cdot x+B(t);$$

根据 (2.4.4), 对于 $t=t_0$ 为零的解由下列公式给出:

$$x(t)=\int_{t_0}^{t}(\exp(t-\tau)A)\cdot B(\tau)d\tau.$$

2.8. 常系数方程: E 有有限维情形

我们限于考虑 E 是 n 维复向量空间, 并且 $A \in \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E;E)$ 情形. 于是 $\exp(tA) \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(E;E)$. 连带着 A 的给出, 把向量空间 E 分解成几个子空间的直和.

自同态 A 的 "特征" 方程是

$$\det(A - \lambda 1_E) = 0; \tag{2.8.1}$$

这是 λ 的 n 次方程, 它的根 ($\mathbb{C}$ 中元素) 是自同态 A 的特征值. 由达朗贝尔 – 高斯定理, 这方程有 n 个根, 条件是把每个根的个数按它的重数计算. 设 λ_i 是不同的特征值. 并且 $k_i \geqslant 1$ 是根 λ_i 的重数. 假定下列结果是已知的; 要证明它只须用 E 的适当的基把方阵 A 化成三角型:

引理. 对于方程 (2.8.1) 的每个 k_i 重根 λ_i, 设 E_i 是满足下列条件的 $x \in E$ 所构成的子空间

$$(A - \lambda_i 1_E)^{k_i} x = 0; \tag{2.8.2}$$

空间 E_i 有维数 k_i (它含有根 λ_i 的特征向量), 并且 E 是这些 E_i 的直和. (我们恰好有 $\sum\limits_i k_i = n$).

承认了这一引理, 显然由 $x \in E_i$ 可导出 $A \cdot x \in E_i$, 因为

$$((A - \lambda_i 1_E)^{k_i} \circ A) \cdot x = (A \cdot (A - \lambda_i 1_E)^{k_i}) \cdot x = A \cdot ((A - \lambda_i 1_E)^{k_i} \cdot x) = 0.$$

把 A 诱导出的线性映射记作 $A_i \in \mathscr{L}(E_i;E_i)$. 我们有

$$(A_i - \lambda_i 1_{E_i})^{k_i} = 0. \tag{2.8.3}$$

在这些条件下, 齐次方程

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x$$

等价于一齐次方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i x_i, \tag{2.8.4}$$

其中 $x_i(t)$ 是在 E_i 中取值的映射. (2.8.4) 的解是

$$x_i(t) = \exp(tA_i) \cdot u_i, \quad \text{其中 } u_i = x_i(0) \in E_i.$$

由 (2.8.3), $\exp(tA_i)$ 可以简化; 现写出如下, 其中为了简便, 把 $A_i - \lambda_i 1_{E_i}$ 写作 $A_i - \lambda_i$:

$$\begin{aligned}\exp(tA_i) = e^{\lambda_i t} \exp t(A_i - \lambda_i) &= e^{\lambda_i t}\left(1_{E_i} + t(A_i - \lambda_i) + \cdots + \frac{t^{k_i - 1}}{(k_i - 1)!}(A_i - \lambda_i)^{k_i - 1}\right) \\ &= e^{\lambda_i t} P_i(t),\end{aligned}$$

其中 $P_i(t)$ 是在 $\mathscr{L}(E_i;E_i)$ 中取值、次数 $\leqslant k_i - 1$ 的多项式. 当 (初始值) u_i 取遍 E_i 中的值时, 多项式 $P_i(t) \cdot u_i$ 形成一个 (k_i 维的) 向量空间, 其中元素是在 E 的子空间 E_i 中取值、次数 $\leqslant k_i - 1$ 的多项式. 总之, 我们有

命题 2.8.1. 对于 A 的每个 (重数是 k_i 的) 特征值 λ_i, 齐次方程

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x \tag{2.8.5}$$

有 (在 E_i 中取值的) 解; 这些解形成一个 k_i 维向量空间, 其中每个解的形状是

$$e^{\lambda_i t} Q_i(t),$$

这里 $Q_i(t)$ 是 (在 E_i 中取值的) 次数 $\leqslant k_i - 1$ 的多项式. (2.8.5) 的任何解是若干个这种解的和:

$$x(t) = \sum_i e^{\lambda_i t} Q_i(t),$$

和式是对若干个不同特征值的集取的.

特别情形. 如果特征方程 (2.8.1) 有 n 个不同的根, 对于每个特征值, 方程 (2.8.5) 有一个下列形状的解:

$$e^{\lambda_i t} c_i (c_i \in E, \quad c_i \neq 0).$$

并且任何解是这样的 n 个特解的 (常系数) 线性组合.

实用方法. 采用待定系数法. 对于每个根 λ_i, 写出最一般的在 E_i 中取值的 k_i-1 次多项式 $Q_i(t)$ [这样就出现 $(k_i)^2$ 个纯量系数], 并且把 $e^{\lambda_i t} Q_i(t)$ 表示成 (2.8.5) 的解; 这样就得到系数所必须满足的一些关系式. 事先已知只有 k_i 个待定系数.

2.9. 常系数 n 阶线性微分方程

只须结合 2.5 及 2.7 段中的结果. 设已给方程

$$\frac{d^n x}{dt^n} = A_0 \cdot x + A_1 \cdot \frac{dx}{dt} + \cdots + A_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}, \tag{2.9.1}$$

其中 $x : \mathbb{R} \to E$ 是未知映射, 并且 $A_i \in \mathscr{L}(E; E)$ 是已给的. 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1_E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1_E & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1_E \\ A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.9.2}$$

并且有

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \cdots & R_{n-1}(t) \\ R_0'(t) & R_1'(t) & \cdots & R_{n-1}'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_0^{(n-1)}(t) & R_1^{(n-1)}(t) & \cdots & R_{n-1}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

已给 “带右端项的” 方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}=\sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{d^i x}{dt^i}+B(t);$$

对于 $t=t_0$, 方程的解本身及它的前 $n-1$ 个导出映射就是零的解是

$$\int_{t_0}^{t} R_{n-1}(t-\tau)B(\tau)d\tau.$$

2.6 段末给出的例子属于这种情形.

更特别地考察 E 是一维复空间、即 $E=\mathbb{C}$ 情形. 设有 (齐次) 方程

$$\frac{d^n x}{dt^n}=\sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i x}{dt^i}, \tag{2.9.3}$$

其中 $a_i \in \mathbb{C}$ 是已给常数, $x(t)$ 是在 $\mathbb{C}$ 中取值的未知函数. 设 $A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n;\mathbb{C}^n)$ 是由方阵 (2.9.2) 所确定的线性映射, 方阵中的 A_i 要换成 a_i. 于是特征方程

$$\det(A-\lambda\cdot 1)=0$$

就是

$$\lambda^n=\sum_{i=0}^{n-1} a_i\lambda^i; \tag{2.9.4}$$

为了证明这一点, 写出对于值 λ, 存在着一个特征向量, 这就是说 (由 2.8 段), 存在着形如

$$x=e^{\lambda t}$$

的 (2.9.3) 的解; 于是显然得到关系式 (2.9.4). 由 2.8 段中的结果, 如果 λ_i 是方程 (2.9.4) 的 k_i 重根, 微分方程 (2.9.3) 有 k_i 个线性无关的解, 与每个 λ_i 相应的解形如

$$e^{\lambda_i t}q_i(t),$$

其中 $q_i(t)$ 是取纯量值的、次数 $\leqslant k_i-1$ 的多项式. 然而这些多项式形成一 k_i 维向量空间; 因此次数 $\leqslant k_i-1$ 的任何多项式 $q_i(t)$ 是方程 (2.9.3) 的一个解 $e^{\lambda_i t}q_i(t)$. 总之有:

命题 2.9.1. *齐次方程 (2.9.3) 的通解形如*

$$\sum_i e^{\lambda_i t}q_i(t),$$

其中 $q_i(t)$ 是 (取纯量值的) k_i-1 次多项式 (k_i : 根 λ_i 的重数); 和式是对特征方程的不相同的根的集作出的.

3. 一 些 问 题

3.1. 含一个参变量的线性自同构群

设 E 是巴拿赫空间, 并且设 $A \in \mathscr{L}(E;E)$; 映射

$$t \mapsto \exp(tA) \tag{3.1.1}$$

是从 $\mathbb{R}$ 到 E 的自同构群 $\mathrm{Isom}(E;E)$ 中的一个连续映射. 由于我们有

$$\exp((t+t')A) = \exp(tA) \circ \exp(t'A),$$

(3.1.1) 是从加法群 $\mathbb{R}$ 到群 $\mathrm{Isom}(E;E)$ 中的一个同态.

相反地, 设

$$t \mapsto B(t)$$

是从加法群 $\mathbb{R}$ 到 $\mathrm{Isom}(E;E)$ 中的一个同态; 假定映射 B 属于 C^1 类. 设 $A = B'(0)$ 是 B 的导出映射对于 $t=0$ 的值; 我们有

$$\begin{aligned} B'(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}(B(t+h) - B(t)) \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}(B(h) - 1_E) \circ B(t) \\ &= A \circ B(t). \end{aligned}$$

因此 $B(t)$ 是微分方程

$$\frac{dB}{dt} = A \circ B(t)$$

的解, 而且 $B(0) = 1_E$; 换句话说, $B(t) = \exp(tA)$.

我们把 C^1 类的同态 $\mathbb{R} \to \mathrm{Isom}(E;E)$ 叫做 E 中线性自同构的含一个 (加性) 参变量的群. 我们刚才建立了这些含一个参变量的群与元素 $A \in \mathscr{L}(E;E)$ 的双射对应关系. 我们往往说 A 是含一个参变量的群的 "无穷小变换".

例. (1) 对于 $A = 1_E$, 我们求得群

$$B(t) = e^t 1_E,$$

即位似比 > 0 的位似群.

(2) 在平面 $E = \mathbb{R}^2$ 中, 设 $A \in \mathscr{L}(E;E)$ 由下列方阵确定:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们有 $A^2 = -1_E$, 并且因此立即得到

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

这是 $\mathbb{R}^2$ 中的旋转群 (按弧度计算, 旋转角是 t).

(3) 更一般, 设 $E=\mathbb{R}^n$. 我们知道正交群 $O(n)$ 是满足

$$B \circ {}^tB = 1_E$$

的线性变换群 $B \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, 其中 ${}^tB$ 表示 B 的转置映射 (这就是说, ${}^tB$ 关于 $\mathbb{R}^n$ 的典范基的方阵, 是 B 的方阵的转置方阵). 因此设 $t \mapsto B(t)$ 是 $O(n)$ 中变换组成的含一个参变量的群; 我们就有

$$B(t) \circ {}^t(B(t)) = 1_E.$$

或由于 $B(t)^{-1}=B(-t)$, 还有:

$$ {}^tB(t) = B(-t). \tag{3.1.2}$$

因此无穷小变换 $A=B'(0)$ 满足

$$ {}^tA = -A. \tag{3.1.3}$$

反过来说, 设 $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 满足上列条件 (这表明 A 的方阵是 "反对称的"); 如果令 $B(t)=\exp(tA)$, 就有

$$\begin{aligned} {}^tB(t) &= {}^t\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}A^n\right) \\ &= \sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}{}^t(A^n); \end{aligned}$$

然而 ${}^t(A^n)=({}^tA)^n$; 由此最后得

$$ {}^tB(t) = \exp(t\,{}^tA).$$

由此看到: 由 (3.1.3) 可导出 (3.1.2). 总之, 要使 A 是正交群 $O(n)$ 中含一个参变量的子群的无穷小变换, 必须而且只须 A 满足 (3.1.3).

由关系式 $B(t){}^t(B(t))=1_E$ 可导出 $(\det B(t))^2=1$, 由此得 $B(t)=\pm 1$ (大家都知道的正交变换的性质). 但 $\det B(t)$ 是 t 的连续映射, 对 $t=0$ 等于 $+1$ (由于 $B(0)=1_E$); 由此可见, 实际上对任何 $t, \det B(t)=+1$. 换句话说, $O(n)$ 的任何含一个参变量的子群包含在行列式为 $+1$ 的正交变换 ("旋转") 的子群 $SO(n)$ 内.

3.2. 含一个参变量之群的芽

在上段中, 从微分方程

$$\frac{dB}{dt} = A \circ B(t)$$

引向 E 中线性自同构的含一个参变量的群; 又考虑在 E 中取值的未知映射 $x(t)$ 的微分方程

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x;$$

前一方程的解 $B(t)$ 是后一方程的预解式.

更一般, 设有微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{3.2.1}$$

其中 f 是从 U 到 E 中的一个连续映射 (E 表示一个巴拿赫空间, U 是 E 中一个开集) 并且是局部李普希茨的. 给出 f 可以解释为在开集 U 中给出了一个向量场: 对每点 $x \in U, f$ 把它与向量 $f(x) \in E$ 连带着, 方程 (3.2.1) 可看作上段所建立结果的一般化; 这里所出现的唯一特点是: 已给函数 $f(x)$ 与 t 无关.

设已给 $x_0 \in U; r, M$ 及 k 是满足下列条件的大于 0 的数: 闭球 $\|x - x_0\| \leqslant r$ 包含在 U 内, 并且我们有

$$\|f(x)\| \leqslant M, \quad 对于\ \|x - x_0\| \leqslant r,$$
$$\|f(x') - f(x'')\| \leqslant k\|x' - x''\|, \quad 对于\ \|x' - x_0\| \leqslant r, \|x'' - x_0\| \leqslant r.$$

对满足 $|u - x_0| \leqslant \rho(\rho < r)$ 的任何 $u \in E$, 闭球 $B(u, r - \rho)$ 包含在球 $B(x_0, r)$ 内; 因此由一般定理 (定理 1.3.1 及定理 1.7.1), 在区间

$$|t| \leqslant \frac{t - \rho}{M}$$

中, 方程 (3.2.1) 有一个、并且只有一个解

$$x = \varphi(t, u)$$

满足 $\varphi(0, u) = u$; 而且我们有

$$\|\varphi(t, u) - u\| \leqslant M|t| \quad 对于 \quad \|t\| \leqslant \frac{r - \rho}{M}. \tag{3.2.2}$$

可看出: 如果 $\|u - x_0\| \leqslant \rho < r$, 并且如果 t 及 $t' \in \mathbb{R}$ 满足 $|t| + |t'| \leqslant (r - \rho)/M$, 那么映射

$$\varphi(t, \varphi(t', u))$$

是确定的, 并且它的值在球 $\|x - x_0\| \leqslant r$ 中.

定理 3.2.1. 在上列假设下, 我们有

$$\boxed{\varphi(t, \varphi(t', u)) = \varphi(t + t', u)}\,. \tag{3.2.3}$$

证. 因为在微分方程 (3.2.1) 中, $f(x)$ 与 t 无关, 所以 $t, \varphi(t+t', u)$ (看作 t 在 $t=0$ 的邻域中的映射) 是微分方程的解; 对于 $t=0$, 它的值显然是 $\varphi(t', u)$. 但是 (3.2.3) 的左边也是 (3.2.1) 的解, 它对 $t=0$ 取值 $\varphi(t', u)$, 于是关系式 (3.2.3) 可由唯一性定理 (定理 1.8.2) 推出.

引进记号 $\varphi_1(u)$ 作为 $\varphi(t, u)$; 对于 $|t| \leqslant (r-\rho)/(2M), \varphi_1$ 是对满足 $\|u-x_0\| \leqslant \rho$ 的 u 确定、并且在球 $\|x-x_0\| \leqslant r$ 中取值的映射. 定理 3.2.1 表明: 对于充分小的 $|t|$ 及 $|t'|$, 在心为 x_0、半径充分小的球中, 可以作复合映射 $\varphi_t \circ \varphi_{t'}$, 并且我们有

$$\boxed{\varphi_t \circ \varphi_{t'} = \varphi_{t+t'}}\,. \tag{3.2.4}$$

为了表明这些性质, 我们说: 映射 φ_t 在 x_0 的邻域内确定含一个 (加性) *参变量 t 之群的芽*. 我们看出: 给出微分方程 (3.2.1), 就在 U 的每点的邻域中确定含一个参变量之群的芽. 要记出

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(u) = f(\varphi_t(u));$$

换句话说, "轨道" 上点 $x = \varphi_t(u)$ 在 "时刻 t" 的 "速度向量" 等于 $f(x)$, 即已给向量场在点 x 的值.

注意. 对于充分小的 t, 我们有

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = 单位元;$$

因此 φ_t 是从 x_0 的一个邻域到 $\varphi_t(x_0)$ 的一个邻域上的一个同胚. 可以证明: 如果映射 f 属于 C^k 类, 那么 φ_t 是从 x_0 的一个邻域到它的像上的一个 C^k 微分同胚.

3.3. 可微性问题

定理 3.3.1. *设有微分方程*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{3.3.1}$$

其中 $f: U \to E$ (开集 $U \subset \mathbb{R} \times E$) 是已给 C^k 类 ($k \geqslant 1$) 映射. 如果 $x = \varphi(t)$ 是 (3.3.1) 的一个解, 那么 φ 属于 C^{k+1} 类.

证. 由假设, 我们有

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \tag{3.3.2}$$

因此 φ' 是 t 的连续映射; 换句话说, φ 属于 C^1 类. 用递推证明: 如果 φ 属于 C^h 类 (其中 $1 \leqslant h \leqslant k$), φ 属于 C^{h+1} 类; 由此显然得到定理中的结果. 然而如果 φ 属于 C^h 类, 由复合映射定理 (第一章, 定理 5.4.2), (3.3.2) 的右边也是 C^h 类映射; 可应用上述定理是因为 $(t, x) \mapsto f(t, x)$ 属于 C^h 类 (既然 $h \leqslant k$). 因此 φ' 属于 C^h 类, 从而 φ 属于 C^{h+1} 类.

3.4. 可微性问题 (续): 对初始值 u 的可微性

微分方程总是设为 (3.3.1). 已知 (第 1.10 段) 如果 f 连续, 并且还对 x 是李普希茨的, 那么方程的满足 $\varphi(t_0,u)=u$ 的解 $\varphi(t,u)$ 对 u 是李普希茨的 (对与 u_0 邻近的 u):

$$\|\varphi(t,u)-\varphi(t,v)\|\leqslant K\|u-v\|.$$

现在要证明: 如果对 $f(t,x)$ 作一可微性假设 (下面将明确作出), $\varphi(t,u)$ 对 u 可微. 事先最好先明确一下: 对于与 x_0 邻近的初始值 u, 解 $t\mapsto\varphi(t,u)$ 的存在域.

命题 3.4.1. 设 $(t,x)\mapsto f(t,x)$ 是连续、对 x 李普希茨的映射, 并且在 E 中取值. 设 $(t_0,x_0)\in U$, 并且设 I 是紧区间 ($t_0\in I$), 其中有方程 (3.3.1) 的解

$$t\mapsto\varphi(t,x_0),$$

它满足初始条件 $\varphi(t_0,x_0)=x_0$. 那么只要 $\|u-x_0\|$ 充分小, 在同一区间 I 中 (当然也可能越出 I!), 存在着满足 $\varphi(t_0,u)=u$ 的解 $\varphi(t,u)$.

证. 对每点 $\tau\in I$, 在 $\mathbb{R}\times E$ 中, 存在着点 $(\tau,\varphi(\tau,x_0))$ 的一个开邻域 W_τ 以及数 k_τ 及 M_τ, 使得

$$\begin{cases}W_\tau\subset U;\\ \|f(t,x)\|\leqslant M_\tau\quad \text{对于 } (t,x)\in W_\tau, f \text{ 对 } x \text{ 是 } k_\tau \text{ 李普希茨的}.\end{cases}$$

由于 I 是紧的, 在 U 中存在着一个开集 V 包含所有的点 $(t,\varphi(t,x_0))$[t 取遍 I 中的值], 并且存在着两个数 M 及 k, 使得

$$\begin{cases}\|f(t,x)\|\leqslant M\quad \text{对于 } (t,x)\in V;\\ f \text{ 在 } V \text{ 中对 } x \text{ 是 } k \text{ 李普希茨的},\end{cases}\tag{3.4.1}$$

可找到 $r>0$, 使 V 包含满足下列条件的所有点 (t,x):

$$t\in I,\|x-\varphi(t,x_0)\|\leqslant r$$

(又应用紧性论据). 另一方面, 设一数 $a>0$ 使得由 $t\in I$ 可导出 $|t-t_0|\leqslant a$. 现要证明: 如可选取 u, 使得

$$\|u-x_0\|\leqslant e^{-ka},\tag{3.4.2}$$

那么取初始值 $\varphi(t_0,u)=u$ 的解 $\varphi(t,u)$ 在整个区间 I 中存在, 并且在其中满足

$$\|\varphi(t,u)-\varphi(t,x_0)\|\leqslant r\quad \text{对于 } t\in I.\tag{3.4.3}$$

设 J 是 I 中包含 t_0 的最大区间, 在其中 $\varphi(t,u)$ 存在并且满足 (3.4.3) (参看定理 1.8.3). 现要证明 $J=I$; 例如证明 J_1 的右端点 $t_1\in J$ 并且等于 I 的右端点. 首先, 由于对于 $t\in J,\|f(t,\varphi(t,u))\|\leqslant M$, 如果 t 及 $t'\in J$, 由有限增量不等式,

$$\|\varphi(t,u)-\varphi(t',u)\|\leqslant M|t-t'|.$$

因此当 t 通过更小的值趋近于 t_1 时, $\varphi(t,u)$ 有极限 x_1. 我们有

$$\|x_1-\varphi(t,x_0)\| = \lim_{\substack{t\to t_1\\ t<t_1}} \|\varphi(t,u)-\varphi(t,x_0)\|;$$

由 1.10 段, 我们有

$$\|\varphi(t,u)-\varphi(t,x_0)\| \leqslant e^{k|t-t_0|}\|u-x_0\|$$

(由 “基本引理” 1.5.1). 因此

$$\|x_1-\varphi(t_1,x_0)\| \leqslant e^{k|t_1-t_0|}\|u-x_0\|,$$

于是由假设 (3.4.2):

$$\|x_1-\varphi(t_1,x_0)\| \leqslant re^{k(|t_1-t_0|-a)}.$$

现可证明: 假定 t_1 是 I 的内点是荒谬的. 事实上, 在这种情形下, 应有 $|t_1-t_0|<a$, 从而

$$\|x_1-\varphi(t_1,x_0)\|<r,$$

并且于是 t_1 应是一个小区间的内点, 在这区间内微分方程应有一解 $\psi(t)$ 满足

$$\|\psi(t)-\varphi(t,x_0)\| \leqslant r, \quad \psi(t_1)=x_1.$$

那么 ψ 应是 $\varphi(t,u)$ 的一个开拓: 这是一个矛盾.

命题 3.4.1 保证了: 只要 u 与 x_0 充分接近, 解 $\varphi(t,u)$ 在紧区间 $t\in I$ 内存在. 现在要给出保证 $\varphi(t,u)$ 对 u 可微的一个准则:

定理 3.4.2. 设 $f(t,x)$ 是在开集 $U\subset\mathbb{R}\times E$ 中连续、在 E 中取值的一个映射; 假定偏导出映射 $f'_x(t,x)$ 存在, 并且是 $(t,x)\in U$ 的连续映射 [当 f 在 U 中属于 C^1 类时, 情况特别是这样]. 设 $(t_0,x_0)\in U$, 并且设 $I\ni t_0$ 是一紧区间, 在 I 中微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{3.4.4}$$

有满足 $\varphi(t_0,x_0)=x_0$ 的解 $\varphi(t,x_0)$. 既然 f 对 x 是局部李普希茨的 (由有限增量不等式, 考虑到 f'_x 局部有界这一事实), 方程 (3.4.3) 在 I 中有一解 $x=\varphi(t,u)$ 满足 $\varphi(t_0,u)=u$, 只要 u 与 x_0 充分接近 (参看命题 3.4.1). 那么作为 $(t,u)\in\mathbb{R}\times E$ 的映射, $\varphi(t,u)$ 是 C^1 类映射; 而且导出映射 $\varphi'_u(t,u)$ 对 t 可导, 并且我们有

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial u}f(t,\varphi(t,u)), \tag{3.4.5}$$

这就是说, $\varphi'_u(t,u)$ 是微分方程

$$\frac{dy}{dt}=A(t,u)\circ y(t), \quad y(t_0)=1_E \tag{3.4.6}$$

的解 $y(t)$, 其中已令

$$A(t,u)=f'_x(t,\varphi(t,u)), \tag{3.4.7}$$

这定理将在 3.5 段中证明. 事先从它导出几个推论. 由 (3.4.6), 作为 t 的映射, $\varphi'_u(t,u)$ 正好是方程

$$\frac{dx}{dt}=A(t,u)\cdot x$$

的预解式 $R(t,t_0)$; 然而 $R(t,t_0)\in \mathrm{Isom}(E;E)$. 由此得

系 3.4.3. 在定理 3.4.2 的假设下, 我们有

$$\varphi'_u(t,u)\in \mathrm{Isom}(E;E).$$

于是对任何 $t_1\in I$, 对于与 (t_1,u_0) 接近的 (t,u), 可对变换

$$(t,u)\to(t,\varphi(t,u))$$

应用局部反演定理. 因此对于与 t_1 接近的 t, 与 x_0 接近的 u, 以及与 $\varphi(t_1,x_0)$ 接近的 x, 关系式

$$x=\varphi(t,u)$$

与

$$u=\psi(t,x)$$

等价, 其中 ψ 属于 C^1 类. 由此导出: 考虑点 $(t,\varphi(t,x_0))$ 的集, 其中 t 取遍 I 中的值; 对于 (t,x) 在这点集的一个邻域中, ψ 属于 C^1 类. 这样:

系 3.4.4. 在 $\mathbb{R}\times E$ 中包含点 $(t,\varphi(t,x_0))$ [t 取遍 I 中的值] 的一开集, 存在着在 E 中取值的一个 C^1 类映射 ψ, 使得微分方程 (3.4.4) 与解 $x=\varphi(t,x_0)$ 邻近的任何解, 可由令 $\psi(t,x)$ 等于与 x_0 接近的任意常数 $u\in E$ 求得.

3.5. 定理 3.4.2 的证明

我们要进行如下: 先引进映射 $y(t)$, 即线性微分方程 (3.4.6) 对于值 $u=x_0$ 的解. 然后证明对于接近于 x_0 的 u, 我们有

$$\|\varphi(t,u)-\varphi(t,x_0)-y(t)\cdot(u-x_0)\|=o(\|u-x_0\|). \tag{3.5.1}$$

由导出映射定义, 这就证明了 $\varphi'_u(t,x_0)$ 存在并且等于 $y(t)$. 已对 u 取值 x_0 证明了的这结果, 对与 u 邻近的值也成立; 因此 $\varphi'_u(t,u)$ 存在, 并且满足 (3.4.5). 为了证明 $\varphi(t,u)$ 属于 C^1 类, 还要验证 $\varphi'_t(t,u)$ 及 $\varphi'_u(t,u)$ 是 (t,u) 的连续映射. 然而

$$\varphi'_t(t,u)=f(t,\varphi(t,u))$$

显然连续. 至于 $\varphi'_u(t,u)$, 它是 (3.4.6) 的解; 并且因为由 (3.4.7), $A(t,u)$ 是 (t,u) 的连续映射, 只须应用定理 1.11.1 就可得这一结论: (3.4.6) 的解 y 是自变量对 (t,u) 的连续映射.

总之, 一切归于证明 (3.5.1). 对于 $t=t_0$, 关系式 (3.5.1) 是明显的, 因为这时由定义, $y(t_0)=1_E$, 而 $\varphi(t_0,u)=u, \varphi(t_0,x_0)=x_0$. 为了简化书写, 令

$$z(t)=\varphi(t,u)-\varphi(t,x_0)-y(t)\cdot(u-x_0), \tag{3.5.2}$$

这里在记号 $z(t)$ 中省去了 u. 通过简单计算, 得到 [把 $A(t,u)$ 写作 $A(t)$]:

$$z'(t)-A(t)\cdot z(t)=f(t,\varphi(t,u))-f(t,\varphi(t,x_0))-f'_x(t,\varphi(t,x_0))\cdot(\varphi(t,u)-\varphi(t,x_0)). \tag{3.5.3}$$

现用有限增量不等式估计上式右边. 事实上, 暂时令

$$\varphi(t,u)=x, \qquad \varphi(t,x_0)=x_1,$$

(3.5.3) 的右边等于

$$f(t,x)-f(t,x_1)-f'_x(t,x_1)\cdot(x-x_1),$$

而且这是 x 的一个映射, 它在 $x=x_1$ 时为零, 它的导出映射是

$$f'_x(t,x)-f'_x(t,x_1).$$

由此得

$$\|f(t,x)-f(t,x_1)-f'_x(t,x_1)\cdot(x-x_1)\|\leqslant m\|x-x_1\|,$$

其中

$$\begin{aligned} m&=\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant1}\|f'_x(t,\lambda x+(1-\lambda)x_1)-f'_x(t,x_1)\|\\ &=\sup_{0\leqslant\lambda\leqslant1}\|f'_x(t,\lambda\varphi(t,u)+(1-\lambda)\varphi(t,x_0))-f'_x(t,\varphi(t,x_0))\|. \end{aligned}$$

于是我们有

$$\|z'(t)-A(t)\cdot z(t)\|\leqslant m\cdot\|\varphi(t,u)-\varphi(t,x_0)\|.$$

然而 $f'_x(t,\lambda\varphi(t,u)+(1-\lambda)\varphi(t,x_0))$ 是 (t,λ,u) 的连续映射; 因此当 u 趋近于 x_0 时, 对于 $t\in I$ 以及 $\lambda\in[0,1]$, 上列 $f'_x(\cdots)$ 一致趋近于 $f'_x(t,\varphi(t,x_0))$ (参看引理 1.10.3). 于是已给 $\varepsilon>0$, 存在着 $\eta>0$, 使得我们有: 只要 $\|u-x_0\|\leqslant\eta$, 对于任何 $t\in I$,

$$\|z'(t)-A(t)\cdot z(t)\|\leqslant\varepsilon\|\varphi(t,u)-\varphi(t,x_0)\|. \tag{3.5.4}$$

然而由 1.10 段, 存在着常数 K, 使得

$$\|\varphi(t,u)-\varphi(t,x_0)\|\leqslant K\|u-x_0\|; \tag{3.5.5}$$

把上式代入 (3.5.4), 就得到: 只要 $\|u-x_0\|\leqslant\eta$,

$$\|z'(t)-A(t)\cdot z(t)\|\leqslant K\varepsilon\|u-x_0\|.$$

而由 (3.5.2), $z(t_0)=0$. 应用基本引理 1.5.1 于下列微分方程:

$$\frac{dz}{dt}=A(t)\cdot z;$$

映射 $A(t)\cdot z$ 对 z 是 α 李普希茨的, 这里

$$\alpha=\sup_{t\in I}\|A(t)\|.$$

由 (3.5.5), $z(t)$ 是误差不超过 $K\varepsilon\parallel u-x_0\parallel$ 的近似解; 取同一初始值 $z(t_0)=0$ 的准确解是零映射; 因此由基本引理得

$$\parallel z(t)\parallel\leqslant K\varepsilon\parallel u-x_0\parallel\cdot\frac{e^{\alpha|t-t_0|}-1}{\alpha}.$$

换句话说, 存在着常数 K', 使得我们有: 对于任何 $t\in I$, 只要 $\parallel u-x_0\parallel\leqslant\eta$,

$$\parallel z(t)\parallel\leqslant K'\varepsilon\parallel u-x_0\parallel.$$

这表明了

$$\parallel z(t)\parallel\leqslant o(\parallel u-x_0\parallel),$$

上式恰好是要证明的关系式 (3.5.1).

3.6. 对微分方程所含一个参变量的可微性

定理 3.6.1. 设有微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,\lambda),\tag{3.6.1}$$

其中 λ 在巴拿赫空间 L 中变动; 假定 f 在开集 $U\subset\mathbb{R}\times E\times L$ 中连续, $f'_x(t,x,\lambda)\in\mathscr{L}(E;E)$ 及 $f'_\lambda(t,x,\lambda)\in\mathscr{L}(L;E)$ 存在并且是 $(t,x,\lambda)\in U$ 的连续映射. 设 $(t_0,x_0,\lambda_0)\in U$, 并且设 $I(t_0\in I)$ 是一紧区间, 在 I 中方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,\lambda_0)$$

有一解 $\varphi(t)$ 满足 $\varphi(t_0)=x_0$. 那么对于充分与 x_0 接近的 u 及充分与 λ_0 接近的 λ, 方程 (3.6.1) 在 I 中有一解 $x=\varphi(t,u,\lambda)$ 满足

$$\varphi(t_0,u,\lambda)=u.$$

于是 $\varphi(t,u,\lambda)$ 是 (t,u,λ) 的 C^1 类映射; 而且 $\varphi'_u(t,u,\lambda)$ 及 $\varphi'_\lambda(t,u,\lambda)$ 对 t 可导, 并且有

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial t},\quad\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

特别, 映射 $\varphi'_\lambda(t,u,\lambda)$ 等于线性微分方程

$$\frac{dz}{dt} = B(t)\circ z + C(t) \tag{3.6.2}$$

在 $\mathscr{L}(L;E)$ 中取值、并满足 $z(t_0)=0$ 的解, 这里已令

$$B(t) = f'_x(t,\varphi(t,u,\lambda),\lambda),$$
$$C(t) = f'_\lambda(t,\varphi(t,u,\lambda),\lambda).$$

证. 我们要立即回到定理 3.4.2. 事实上, 引进含两个未知映射 $x(t)$ 及 $y(t)$ 的微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\lambda), \quad \frac{dy}{dt} = 0,$$

并带有初始条件 $x(t_0)=u, y(t_0)=\lambda$ (映射 $y(t)$ 在 L 中取值). 把这方程组看作唯一一个方程, 其中未知映射在 $E\times L$ 中取值, 对于 $t=t_0$ 的初始值是 (u,λ). 对这方程应用定理 3.4.2. 由此求得解

$$x=\varphi(t,u,\lambda), \quad y=\lambda$$

它是对 (t,u,λ) 的 C^1 类映射. 证明易于完成.

3.7. 高阶可微性

定理 3.7.1. *设有微分方程*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\lambda),$$

其中 f 在开集 $U\subset\mathbb{R}\times E\times L$ 中属于 C^k 类 ($k\geqslant 1$), 并且设 $x=\varphi(t,u,\lambda)$ (对 $t\in$ 紧区间 I) 是对 $t=t_0$ 取值 u 的解 (参看定理 3.6.1). 那么映射 $\varphi(t,u,\lambda)$ 对 (t,u,λ) 属于 C^k 类.

证. 我们要对 k 递推证明这定理. 这定理对 $k=1$ 是正确的 (定理 3.6.1). 假定它对 $k-1(k\geqslant 2)$ 正确, 要证明它对 k 正确. 只须证明 $\varphi'_t(t,u,\lambda), \varphi'_u(t,u,\lambda)$ 及 $\varphi'_\lambda(t,u,\lambda)$ 是 C^{k-1} 类映射. 对于 φ'_t, 这是明显的, 因 $\varphi'_t(t,u,\lambda)=f(t,\varphi(t,u,\lambda),\lambda)$, 并且 $\varphi(t,u,\lambda)$ 属于 C^{k-1} 类 (递推假设).

映射 $\varphi'_u(t,u,\lambda)$ 是方程

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t,\varphi(t,u,\lambda),\lambda)\circ y(t), \quad y(t_0)=1_E$$

的解; 上列方程的右边对 (t,u,λ) 属于 C^{k-1} 类 (递推假设). 因此由定理 3.7.1 应用到上列方程, 可见它的解属于 C^{k-1} 类 (递推假设). 同样, $\varphi'_\lambda(t,u,\lambda)$ 是方程

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(t,\varphi(t,u,\lambda),\lambda)\circ z(t) + f'_\lambda(t,\varphi(t,u,\lambda),\lambda)$$

在 $\mathscr{L}(L;E)$ 中取值、且满足初始条件 $z(t_0)=0$ 的解, 上列微分方程的右边属于 C^{k-1} 类; 因此把定理 3.7.1 应用到这方程 (递推假设), 可见它的解对 (t,u,λ) 属于 C^{k-1} 类. 证完.

注意. 事实上, 对 t 的导出映射

$$\varphi'_t(t,u,\lambda)=f(t,\varphi(t,u,\lambda),\lambda)$$

对 (t,u,λ) 属于 C^k 类, 而不仅属于 C^{k-1} 类.

3.8. 二阶微分方程情形

设有二阶微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(t,x,\frac{dx}{dt}\right), \tag{3.8.1}$$

其中 f 在开集 $U\subset\mathbb{R}\times E\times E$ 中属于 C^k 类 $(k\geqslant 1)$, 并且在 E 中取值. 设 $(t_0,x_0,x'_0)\in U$. 由前面的一般定理, 存在着把 x_0 含在内部的一个区间 I, 并且对于与 (x_0,x'_0) 充分接近的任何变量对 $(u,v)\in E\times E$, 存在着方程 (3.8.1) 的一个 (唯一的) 解

$$x=\varphi(t,u,v),\quad t\in I,$$

它满足

$$\varphi(t_0,u,v)=u,\quad \varphi'_t(t_0,u,v)=v. \tag{3.8.2}$$

映射 $\varphi(t,u,v)$ 属于 C^k 类.

定理 3.8.1. 在上列假设下, 如果确定与 t_0 充分接近、但 $\neq t_0$ 的一点 $t_1\in I$, 那么映射

$$(u,v)\mapsto(u,\varphi(t_1,u,v)) \tag{3.8.3}$$

是从 (x_0,x'_0) 在 $E\times E$ 中一个邻域到 (x_0,x_1) 在 $E\times E$ 中一个邻域上的 C^k 微分同胚 [已令 $x_1=\varphi(t_1,x_0,x'_0)$].

注释. 现说明这定理的几何意义: 在与初始位置 x_0 及 "初始速度" x'_0 相对应的积分曲线

$$x=\varphi(t,x_0,x'_0)$$

上, 我们注意起点 x_0 (对于 $t=t_0$ 的位置) 及终点 x_1 (对于 $t=t_1$ 的位置). 于是如果给出与 x_0 及 x_1 分别充分接近的点 y_0 及 y_1, 存在着与 x'_0 接近的唯一一个初始速度 y'_0, 使得积分曲线 $x=\varphi(t,y_0,y'_0)$ 对于 $t=t_1$ 正好通过点 y_1. 而且这一初始速度 y'_0 是变量对 (y_0,y_1) 的 C^k 类映射.

定理 3.8.1 的证明. 只须证明

$$\varphi'_v(t_1,x_0,x'_0)\in\mathrm{Isom}(E;E).$$

事实上, (3.8.3) 的导出映射在点 (x_0, x'_0) 是由方阵

$$\begin{pmatrix} 1_E & 0 \\ ? & \varphi'_v \end{pmatrix}$$

确定的; 这方阵是 $\mathrm{Isom}(E \times E; E \times E)$ 的一个元素; 我们应用局部反演定理: (3.8.3) 是从 (x_0, x'_0) 的一个邻域到它的像上的一个 C^k 微分同胚.

于是一切回到计算 $\varphi'_v(t_1, x_0, x'_0)$. 设

$$y(t) = \varphi'_v(t, x_0, x'_0).$$

我们知道这是 t 的可微映射, 并且

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

特别, 对 $t = t_0$, 由 (3.8.2), 我们有

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, u, v) = 1_E,$$

因此 $y'(t_0) = 1_E$, 又仍然由 (3.8.2),

$$\frac{\partial}{\partial v}\varphi(t_0, u, v) = 0, \quad \text{因此 } y(t_0) = 0.$$

由此导出

$$\|y(t_1) - (t_1 - t_0)1_E\| = o(|t_1 - t_0|).$$

因此只要 $0 < |t - t_1| \leqslant \varepsilon(\varepsilon > 0$ 充分小), 我们有

$$\|y(t_1) - (t_1 - t_0)1_E\| < |t_1 - t_0|,$$

从而 $y(t_1) \in \mathrm{Isom}(E; E)$, 因为

$$y(t_1) = (t_1 - t_0)(1_E + \alpha),$$

这里 $\alpha \in \mathscr{L}(E; E)$ 满足 $\|\alpha\| < 1$. 因此如果选取 t_1, 使得 $0 < |t_1 - t_0| < \varepsilon$, 就有

$$\varphi'_v(t_1, x_0, x'_0) \in \mathrm{Isom}(E; E).$$

证完.

3.9. 不含自变量的微分方程

我们已经谈到 (参看 3.2 段, 含一个参变量之群的芽) 有下列形状的方程:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{3.9.1}$$

这里 f 在巴拿赫空间 E 中一个开集 U 内属于 C^1 类.

注意一般情形可以归结为上述情形: 已给微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{3.9.2}$$

我们可以把它与下列微分程相连带 (含实变量 u 的两个未知映射 x 及 t):

$$\frac{dx}{du} = f(t, x), \quad \frac{dt}{du} = 1 \tag{3.9.3}$$

[$t(u)$ 在 $\mathbb{R}$ 中取值, $x(u)$ 在巴拿赫空间 E 中取值], 并且给出下列初始条件: 对于 $u = t_0$, 我们要求 t 取值 t_0, x 取值 x_0, 于是 $t = u$ 及 $x(u)$ 是一映射 $x(t)$, 它是 (3.9.2) 对 $t = t_0$ 取值 x_0 的解.

回到 (3.9.1), 已给一个解 $x = \varphi(t)$, 我们关心点 $\varphi(t)$ 在空间 E 中的轨道, 即映射 φ 的像, 而不关心表示这轨道的参变量 t. 如果 $x_0 = \varphi(t_0)$, 并且如果 $f(x_0) = 0$, 由微分方程解的唯一性定理, 我们知道 $\varphi(t)$ 是常量. 现要研究 $f(x_0) \neq 0$ 情形.

为了简化, 假定 $E = \mathbb{R}^n$, 并且设 $x_1, \cdots, x_n$ 是点 $x \in \mathbb{R}^n$ 的坐标; 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是初始点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 的坐标. 方程 (3.9.1) 可写成一个方程组

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \cdots, x_n), 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{3.9.4}$$

并且设函数 f_i 中至少有一个在点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 处 $\neq 0$. 例如假定

$$f_n(a_1, \cdots, a_n) \neq 0.$$

至少在 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的一个适当的邻域内, 方程组 (3.9.4) 等价于

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dx_n} = \dfrac{f_i(x)}{f_n(x)} & \text{对于 } 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ \dfrac{dt}{dx_n} = \dfrac{1}{f_n(x)}. \end{cases}$$

可以看出, 在这邻域内, 轨道由微分方程组

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(x)}{f_n(x)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \tag{3.9.5}$$

给出, 其中含自变量 x_n 的 $n-1$ 个未知函数 $x_1, \cdots, x_{n-1}$, 它们对 $x_n = a_n$ 取值 $(a_1, \cdots, a_{n-1})$. 这样, 我们可取 x_n 作为轨道曲线上的 "参变量", 然后从关系式

$$\frac{dt}{dx_n} = \frac{1}{f_n(x)}$$

通过积分得到 x_n 的函数 t.

如果我们关心的是轨道, 而不是 "时间规律", 于是在点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的邻域内研究 (3.9.5). 这方程组往往写成下列形式

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \frac{dx_2}{f_2(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x)}, \tag{3.9.6}$$

这里不预定怎样选取什么坐标作为参变量; 但是要把 (C^1 类) 函数 $f_1, \cdots, f_n$ 看作在点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 不全为零.

更一般, 考虑下列类型的方程组:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x) \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{3.9.7}$$

其中 $c_{ij}(x)$ 是在点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的邻域中属于 C^1 类的纯量函数, 而且矩阵 $\{c_{ij}(x)\}$ 在点 $(a_1, \cdots, a_n)$ [因而在邻近的任何点] 处的秩等于 $n-1$. 这种方程组往往写成下列形状:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x) dx_j = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \tag{3.9.8}$$

在几何上, 方程组 (3.9.8) 的一个解确定 $\mathbb{R}^n$ 中 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的邻域内一条曲线 C. 它由参变量表示为 $x = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 并且满足

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x(t)) x_j'(t) = 0 \quad 对于 \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

这一组 $(n-1)$ 个 $x_j' = dx_j/dt$ 之间的齐次线性关系式等价于 (由于对矩阵的秩的假设) 形如 (3.9.4) 的方程组, 我们说关系式 (3.9.8) 构成一个微分方程组, 它的解是 (3.9.4) 的轨道, 即最后是形如 (3.9.6) 的微分方程组的解 (f_i 不全为零); 如果 C 是这一曲线, 我们往往说 (3.9.8) 的左边在 C 上是零.

这样, 在矩阵 $\{a_{ij}(x)\}$ 的秩是 $n-1$ 时, 局部存在与唯一性定理可用来讨论形如 (3.9.8) 的方程组.

$f_1, \cdots, f_n$ 同时为零情形. 在一点, 方程组 (3.9.8) 的系数矩阵的秩 $< n-1$ 时就是这种情形. 在这种情形下, 不能对方程组 (3.9.6) 应用局部存在与唯一性定理. 当然, 还是可应用到 (3.9.4), 但是当 $f_1, \cdots, f_n$ 在点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 为零时, 点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的轨道缩小成一点. 我们要通过例子表明: 当函数 f_i 同时为零时, 在一点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的邻域内, 轨道集的形状可能是怎样的. 简单地取 $n = 2$, 并且把 x 及 y 记作平面 $\mathbf{R}^2$ 上的坐标. 取点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 为原点. 由于对 $n = 2, n-1 = 1$, 可看出要在原点的邻域内研究方程

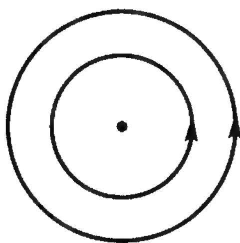
$$a(x,y)dx + b(x,y)dy = 0,$$

其中函数 a 及 b 属于 C^1 类, 并且两函数都在原点为零.

例 1. $\quad xdx + ydy = 0$

这方程可从下列方程组得到:

$$\frac{dx}{dt}=-y,\quad \frac{dy}{dt}=+x.$$



我们知道从这方程组可产生平面上的旋转群

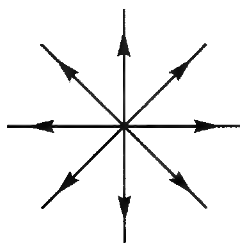
$$x=x_0\cos t-y_0\sin t, y=x_0\sin t+y_0\cos t.$$

轨道是心为原点的圆; 原点是缩小成一点的轨道.

例 2. $xdy-ydx=0$.

这方程可从下列方程组得到:

$$\frac{dx}{dt}=x,\quad \frac{dy}{dt}=y.$$



这方程组产生位似群

$$x=x_0e^t,\quad y=y_0e^t$$

轨道是从原点出发的半射线; 原点是缩小成一点的轨道.

例 3. $xdy+ydx=0$.

这方程可由下列方程组得出:

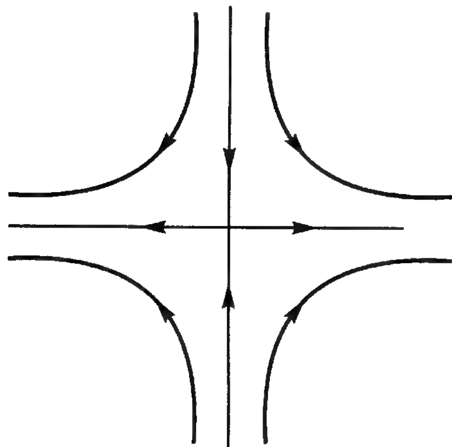
$$\frac{dx}{dt}=x,\quad \frac{dy}{dt}=-y.$$

这方程组产生含一个参变量的群

$$x=x_0e^t, y=y_0e^{-t}.$$

轨道是以坐标轴为渐近线的等轴双曲线的分支, 以及四个半坐标轴; 最后原点是缩小为一点的轨道.

图形上的箭头表示参变量 t 增加的方向.



3.10. "未解出的" 微分方程

在这里我们不讲一般理论, 只限于指出在最简单情形下的几个原则: 考虑一个一阶方程情形, 其中未知函数 y 的自变量 $x \in \mathbb{R}$ (y 也在 $\mathbb{R}$ 中取值). 所涉及的是下列形状的方程:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{3.10.1}$$

在这里, $F(x, y, y')$ 是开集 $U \subset \mathbb{R}^3$ 中 (取纯量值的) 一个 C^2 类函数. 问题如下:

已给一点 $(x_0, y_0, y'_0) \in U$ 满足 $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$, 求出方程 (1.10.1) 的这样一个解 $y = \varphi(x)$, 这里 φ 在 x_0 的邻域内属于 C^1 类, 在 $\mathbb{R}$ 中取值, 并且满足

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y'_0, \quad F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0. \tag{3.10.2}$$

这问题与下列问题相同: 求 x (与 x_0 邻近) 的一组两个函数 y 及 y', 它们对 $x = x_0$ 分别取值 y_0 及 y'_0, 并满足

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{dy}{dx} = y'.$$

现把问题略为改动一下: 更一般地, 求同一个自变量 t (事先不明确取定) 的三个函数 x, y, y', 它们取初始值 x_0, y_0, y'_0, 并且满足

$$F(x, y, y') = 0, \quad dy - y'dx = 0; \tag{3.10.3}$$

这表明 $dy/dt - y'(dx/dt) = 0$.

实际按照不同情形, 取三个量 x, y, y' 中的一个作为 t (下面要明确指出).

为了研究混合组 (3.10.3), 把它用下列微分方程组来代替:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial y'}dy' = 0, \quad dy - y'dx = 0}. \tag{3.10.4}$$

如果我们有这方程组的满足*初始条件* (x_0, y_0, y'_0) 的一组解 (x, y, y') (x, y, y' 是单变量 t 的函数), 那么由于 F 的导函数是零, 复合函数 $F(x(t), y(t), y'(t))$ 是常数, 而且又因它的初始值是零, 这常数的值是零. 因此我们恰好有 (3.10.3) 的一个解.

总之, 我们把原问题 (求 (3.10.1) 的满足初始条件 (x_0, y_0, y_0') 及 $F(x_0, y_0, y_0') = 0$ 解) 用略为一般的问题来代替: 求微分方程组 (3.10.4) 的满足同样初始条件的解.

(3.10.4) 中两方程构成关于三个变量 x, y, y' 的形如 (3.9.8) 的方程组; 这两方程左边的系数的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial y'} \\ -y' & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

如果在点 (x_0, y_0, y_0') 的邻域中, 上列矩阵的秩是 2, 那么方程组 (3.10.4) 等价于

$$\frac{dx}{\partial F/\partial y'} = \frac{dy}{y'(\partial F/\partial y')} = \frac{-dy'}{\partial F/\partial x + y'(\partial F/\partial y)}, \tag{3.10.5}$$

其中三个分母不全是零. 因此我们回到了已经研究过的形如 (3.9.6) 的方程组.

要分别考虑两种情形 (两者并非互不相容).

第一种情形. $\partial F/\partial y' \neq 0$, 我们可取 x 作为自变量, 并且方程组 (3.10.5) 等价于

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x + y'(\partial F/\partial y)}{\partial F/\partial y'}.$$

(含 x 的两个未知函数 y 及 y' 的常微分方程组). 事实上, 这种情形是可对方程

$$F(x, y, y') = 0$$

应用隐函数存在定理情形. 上列方程在 (x_0, y_0, y_0') 的邻域中可解出 $y' = f(x, y)$, 因此我们回到经典的情形: 有存在及唯一性的局部定理.

第二种情形. $\partial F/\partial x + y'(\partial F/\partial y) \neq 0$. 我们可取 y' 作为自变量, 并且方程组 (3.10.5) 等价于

$$\frac{dx}{dy'} = -\frac{\partial F/\partial y'}{\partial F/\partial x + y'(\partial F/\partial y)}, \quad \frac{dy}{dy'} = -\frac{y'(\partial F/\partial y')}{\partial F/\partial x + y'(\partial F/\partial y)}. \tag{3.10.6}$$

上两方程的右边都是 (x, y, y') 的 C^1 类函数; 于是由存在与唯一性的局部定理, 可求得解 x 及 y, 它们是 y' 的函数, 对于 $y' = y_0'$ 分别取值 x_0 及 y_0.

第二种情形的例. 设有方程 $x + yy' = 0$, 而且 $x_0 = 0, y_0 = 0$. 于是 $\partial F/\partial y' = y$ 在点 (x_0, y_0, y_0') 为零, 但是 $\partial F/\partial x + y'(\partial F/\partial y) = 1 + y'^2 \neq 0$. 那么 (3.10.6) 的唯一的解是

$$x = 0, \quad y = 0;$$

换句话说, 变量 y' 的函数 x 及 y 总是零. 这样得到的空间 (x, y, y') 中的曲线是一直线, 而它在 (x, y) 平面上的投影缩小成一点. 我们看到: 确切地说, 这 "解" 不是原问题的解: 它是一个广义解: 它是 (3.10.4) 的解, 而在 (3.10.4) 中, y' 要变动.

我们不讨论 $\partial F/\partial y'$ 及 $\partial F/\partial x + y'(\partial F/\partial y)$ 在点 (x_0, y_0, y_0') 是零的情形. 只指出一种极端情形:

在空间 $\mathbb{R}^3$ (坐标为 x, y, y') 中曲线 C 上所有点.

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad F(x, y, y') = 0,$$

但是在 C 上, $\partial F/\partial y \neq 0$. 在这种情形下, 由于关系式

$$\frac{\partial F}{\partial y}(dy - y'dx) = dF - \frac{\partial F}{\partial y'}dy' - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y}\right)dx,$$

在 C 上, 我们有 $dy - y'dx = 0$. 换句话说, C 是方程组 (3.10.4) 的一条积分曲线. 于是我们说这是微分方程 (3.10.1) 一个奇异积分.

[我们不讲述奇异积分的一般理论.]

奇异积分的例: 克莱罗方程. 这涉及经典方程

$$y = xy' + g(y') \quad (g\text{是已给的 } C^2 \text{ 类函数}). \tag{3.10.7}$$

在这里 $\partial F/\partial x + y'(\partial F/\partial y)$ 恒等于零, 并且奇异积分由 $F = 0, \partial F/\partial y' = 0$ 确定, 即

$$x + g'(y') = 0, y = -y'g'(y') + g(y') \tag{3.10.8}$$

我们很自然地找到这奇异积分, 只要把求所有解的一般方法应用到 (3.10.7): 在这里方程组 (3.10.4) 可写成

$$dy = xdy' + y'dx + g'(y')dy', \quad dy = y'dx,$$

在上列第一个方程中, 用 $y'dx$ 代替 dy, 可见上列方程组等价于

$$[x + g'(y')]dy' = 0, \quad dy = y'dx$$

或

$$[x + g'(y')]dy' = 0, dF = 0 \quad (F = -y + xy' + g(y')).$$

又我们只保留使 F 的常数值是零的解; 最后, 我们必须解

$$[x + g'(y')]dy' = 0, y = xy' + g(y'). \tag{3.10.9}$$

"通" 解由 dy'=0 给出, 即 $y' = c$ (常数), 由此得 $y = cx + g(c)$. 这是 (平面 (x, y) 上) 含参变量 c 的一族直线. 但是还有 "奇异" 解 $x = -g'(y)$; 把 x 的这值代入 $y = xy' + g(y')$, 就找到奇异解 (3.10.8). 我们可验证, 把奇异积分看作 (x, y) 平面上的曲线, 它是直线族 $y = cx + g(c)$ 的包络. 通过包络上一点, 有两条积分曲线: 直线及奇异积分. 解的唯一性定理不成立 (当然, 定理的假设没有得到满足!).

拉格朗日方程的更一般情形. 这涉及微分方程 (未对 y' 解出):

$$y = xf(y') + g(y'),$$

其中 f 及 g 是两个已给函数. 一般方法引导到解下列方程组

$$\begin{cases}(y'-f(y'))dx=[xf'(y')+g'(y')]dy',\\ y=xf(y')+g(y').\end{cases}\tag{3.10.10}$$

如果 $y_0'-f(y_0')\neq 0$, (3.10.10) 中第一个微分方程对 x 给出满足 $\varphi(y_0')=x_0$ 的一个函数 $\varphi(y')$; 第二个方程也给出 y 作为 y' 的函数, 于是我们得到积分曲线的参变量表示式.

$y_0'-f(y_0')=0$ 情形必须另行讨论. 一个拉格朗日方程可能有奇异积分, 也可能没有.

例. 设有方程

$$y+kx+2y'+y'^2=0\quad (k \text{ 是已给常数}).$$

对于一个奇异积分, 必须有

$$1+y'=0,\quad k+y'=0.$$

因此如果 $k\neq 1$, 就没有奇异积分. 假定 $k=1$: 方程组 (3.10.10) 可写成

$$(1+y')\cdot(dx+2dy')=0,\quad y=-x-2y'-y'^2.$$

一般积分由 $dx+2dy'=0$ 给出, 由此得

$$x=x_0-2(y'-y_0'),\quad y=-x_0-2y_0'-y'^2$$

(这曲线是抛物线, 以 y' 为参变量). 奇异积分由下式给出: $y'=-1, y=-x+1$: 这是一直线, 是抛物线族的包络.

4. 首次积分与线性偏微分方程

4.1. 微分方程组的首次积分的定义

考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(x),\tag{4.1.1}$$

其中 f 是开集 $U\subset E$ 中 C^1 类映射, 并且在 E 中取值 (E 总是表示一个巴拿赫空间). 这里涉及的是与 t 无关的映射; 可是在 3.9 段中已经看到: 可把一般情形化成这种特殊情形.

定义. 设 $\psi(x)$ 是 U 中的 C^1 类映射 (取纯量值, 或更一般在一个巴拿赫空间 F 中取值). 如果只要 $\varphi: I\to U$ 是微分方程 (4.1.1) [在区间 I 中] 的一个解, 复合映射 $\psi(\varphi(t))$ 是常量 (即与 t 无关), 那么 $\psi(x)$ 就叫做方程 (4.1.1) 的*首次积分*.

关系式 $x=\varphi(t)$ 确定一个所谓 "轨道". 因此可以不失原意地说: *映射 ψ 在 U 中包含的每条轨道上是常量*.

命题 4.1.1. 要使 ψ 是微分方程 (4.1.1) 的首次积分, 必须而且只须我们有: 对于任何点 $x \in U$,

$$\psi'(x) \cdot f(x) = 0. \tag{4.1.2}$$

[评述. $\psi'(x)$ 是 $\mathscr{L}(E;F)$ 的一个元素; $\psi'(x) \cdot f(x) \in F$ 表示它对 $f(x) \in E$ 的值. 条件 (4.1.2) 表明这值是零].

证. 条件 (4.1.2) 是充分的; 事实上, 它表明映射 $\psi \circ \varphi$ 有零导出映射, 这是因为

$$(\psi \circ \varphi)'(t) = \psi'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \psi'(\varphi(t)) f(\varphi(t)).$$

因此映射 $\psi \circ \varphi$ 是常量.

反过来证明条件 (4.1.2) 是必要的: 如果 ψ 是首次积分, 我们有: 对于方程 (4.1.1) 的任何解 φ,

$$\psi'(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t)) = 0;$$

然而微分方程的解的存在性定理告诉我们: 通过任何点 $x_0 \in U$, 只有一条积分曲线; 因此对任何 $x_0 \in U$, 我们有 $\psi'(x_0) \cdot f(x_0) = 0$. 证完.

$E = \mathbb{R}^n$ 情形. 这是下列微分方程组情形:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \cdots, x_n), \tag{4.1.3}$$

其中 f_i 取纯量值 (在开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 中属于 C^1 类), x_i 是 t 的取纯量值的未知函数. 于是首次积分是 n 个实变数 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$, 并且条件 (4.1.2) 可写成

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \cdots, x_n) \frac{d\psi}{dx_i} = 0}. \tag{4.1.4}$$

这是表明 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ 是方程组 (4.1.3) 的首次积分的条件.

在未知函数 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ 与偏导数 $\partial\psi/\partial x_i$ 之间形如 (4.1.4) 的关系式中,"系数" f_i 是给定的 (C^1 类) 函数. 这关系式叫做一个齐次线性一阶偏微分方程. 我们看到: 任意给出一个这样的方程, 可用方程的 "系数" f_i 连带作出微分方程组 (4.1.3); 于是偏微分方程的解 ψ 是连带微分方程组 (4.1.3) 的首次积分. 方程组 (4.1.3) 叫做方程 (4.1.4) 的特征方程组.

注意. 可以把上面的一些概念推广到任意阶、而不仅是 1 阶微分方程组情形, 例如设有二阶微分方程组

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f_i\left(x_1, \cdots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}\right), 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{4.1.5}$$

我们知道: 连带着这方程组, 可作一个含 $2n$ 个方程的一阶微分方程组:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i', \frac{dx_i'}{dt} = f_i(x_1, \cdots, x_n, x_1', \cdots, x_n'). \tag{4.1.6}$$

对 (4.1.6) 应用首次积分的定义: 首次积分就是满足下列方程的函数 $\psi(x_1,\cdots,x_n, x'_1,\cdots,x'_n)$:

$$\sum_{i=1}^{n} x'_i \frac{d\psi}{dx_i} + \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1,\cdots,x_n,x'_1,\cdots,x'_n)\frac{\partial\psi}{\partial x'_i} = 0$$

(关于 $x_1,\cdots,x_n,x'_1,\cdots,x'_n$ 的恒等关系式). 于是我们说

$$\psi\left(x_1,\cdots,x_n,\frac{dx_1}{dt},\cdots,\frac{dx_n}{dt}\right)$$

是方程组 (4.1.5) 的首次积分. 这概念在力学中是重要的, 其中要用到二阶微分方程; 例如可举出经典的 "动力定理".

4.2. 首次积分的存在性

我们只限于考虑在空间 $\mathbb{R}^n$ 中形如 (4.1.3) 的线性微分方程组. 假定在点 $(a_1,\cdots, a_n)\in U$, $f_i(a_1,\cdots,a_n)$ 不全是零, 例如 $f_n(a_1,\cdots,a_n)$ 不是零. 在 3.9 段中已经看到: 方程组

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x)} \tag{4.2.1}$$

在 $(a_1,\cdots,a_n)$ 的一个适当的邻域中, 可写成

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(x)}{f_n(x)}, \quad 1\leqslant i\leqslant n-1$$

并且这样可求得与 "时间法则" 无关的 "几何轨线". 而一个首次积分恰好是在几何轨线上取常数的一个函数. 我们知道: 对于 $x_n = a_n$, 在 $(a_1,\cdots,a_{n-1})$ 附近的值 $(u_1,\cdots,u_{n-1})$, (4.2.1) 所取的解是

$$x_i = \varphi_i(x_n;u_1,\cdots,u_{n-1}), \quad 1\leqslant i\leqslant n-1. \tag{4.2.2}$$

其中 φ_i 对 $(x_n,u_1,\cdots,u_{n-1})$ 属于 C^1 类: 参看定理 3.4.2. 我们还知道 (系 3.4.3): 对于与 $(a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)$ 邻近的 $(u_1,\cdots,u_{n-1},x_n)$, 矩阵

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-1\\ 1\leqslant j\leqslant n-1}} \tag{4.2.3}$$

的行列式不等于零. 因此由隐函数存在定理, 方程组 (4.2.2) 等价于

$$u_i = \psi_i(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n), \quad 1\leqslant i\leqslant n-1, \tag{4.2.4}$$

其中 ψ_i 在 $(a_1,\cdots,a_n)$ 的邻域中属于 C^1 类.

显然, $n-1$ 个函数 ψ_i 中每一个都是首次积分: 在每条积分曲线 (4.2.2) 上, ψ_i 是常数. 此外, 矩阵

$$\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}\right)$$

是矩阵 (4.2.3) 的逆矩阵, 并且有一非零行列式. 设 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的邻域中任一首次积分; 那么

$$\psi(\varphi_1(x_n; u_1, \cdots, u_{n-1}), \cdots, \varphi_{n-1}(x_n; u_1, \cdots, u_{n-1}), x_n)$$

是与 x_n 无关的函数, 设它是 $\Phi(u_1, \cdots, u_{n-1})$. 由此得

$$\psi(x_1, \cdots, x_n) = \Phi(\psi_1(x), \cdots, \psi_{n-1}(x)). \tag{4.2.5}$$

换句话说, 任何首次积分在 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的邻域内, 可表示为 $n-1$ 个首次积分 $\psi_1, \cdots, \psi_{n-1}$ 的函数 Φ. 此外, 对于有 $n-1$ 个自变量的任何函数 Φ (属于 C^1 类), 复合函数 $\Phi(\psi_1(x), \cdots, \psi_{n-1}(x))$ 显然是一个首次积分.

因此证明了下列定理:

定理 4.2.1. 如果有一微分方程组 (4.2.1), 其中数值函数 $f_1, \cdots, f_n$ 在 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的邻域中属于 C^1 类, 并且不全是零, 那么在 $(a_1, \cdots, a_{n-1})$ 的邻域内, 它有一组 $n-1$ 个首次积分 $\psi_1, \cdots, \psi_{n-1}$ [取纯量值], 而且它们的导数在这邻域中任何点是线性无关的线性形式; 那么任何首次积分 ψ 有这种形式: $\Phi(\psi_1, \cdots, \psi_{n-1})$ [其中 Φ 是任意的 C^1 类函数].

考虑到 4.1 段, 可叙述等价的定理如下:

定理 4.2.2. 设已给偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \cdots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0, \tag{4.2.6}$$

其中系数 $f_i(x)$ 在 $(a_1, \cdots, a_n)$ 的邻域内是 C^1 类数值函数, 在点 $(a_1, \cdots, a_n)$ 所取值不全是零. 那么方程 (4.2.6) 有 $n-1$ 个 (取纯量值的) 解 $\psi_1, \cdots, \psi_{n-1}$, 它们的导数线性无关, 并且任何解是一个 (任意的) 函数 $\Phi(\psi_1, \cdots, \psi_{n-1})$.

4.3. 非齐次线性偏微分方程

我们回到方程 (4.2.6), 但把 $y(x_1, \cdots, x_n)$ 叫做未知函数. 可作推广如下: 假定系数 f_i 是函数 $f_i(x_1, \cdots, x_n, y)$, 它们也依赖于 y, 还把方程加上右端项:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \cdots, x_n, y) \frac{\partial y}{\partial x_i} = f(x_1, \cdots, x_n, y). \tag{4.3.1}$$

(数值) 函数 f_i 及 f 是已给的, 属于 C^1 类. 形如 (4.3.1) 的方程含 $x_1, \cdots, x_n$ 的未知函数 y, 叫做 (非齐次) 一阶线性偏微分方程.

当 f 及 f_i 在一点 $(a_1, \cdots, a_n, b)$ 的邻域中不全是零时, 我们要指出解这方程的一种方法. 为此, 要用一种技巧把它化到齐次情形.

在 $(a_1,\cdots,a_n,b)$ 的邻域中, 找出一个 C^1 类数值函数 $\psi(x_1,\cdots,x_n,y)$, 使得 $\psi(a_1,\cdots,a_n,b)=0$, 但 $\partial\psi/\partial y$ 在 $(a_1,\cdots,a_n,b)$ 不等于 0, 还使下列关系式确定的函数 $y=\lambda(x_1,\cdots,x_n)$ 满足 (4.3.1):

$$\psi(x_1,\cdots,x_n,y)=0 \tag{4.3.2}$$

[隐函数定理!]. 对 (4.3.2) 作微分, 得到

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}=0,\quad \text{由此得}\quad -\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}=\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial\psi}{\partial y};$$

如果写出 $\partial\lambda/\partial x_i$ 满足 (4.3.1), 就求得

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1,\cdots,x_n,y)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+f(x_1,\cdots,x_n,y)\frac{\partial\psi}{\partial y}=0. \tag{4.3.3}$$

因此在满足 (4.3.2) (并与 $(a_1,\cdots,a_n,b)$ 充分接近) 的任何点 $(x_1,\cdots,x_n,y)$, (4.3.3) 必然成立.

还要证明: (4.3.1) 的任何解可由隐函数方程 $\psi(x_1,\cdots,x_n,y)=0$ 求得, 使得 (4.3.3) 恒等地成立 [而不仅在满足 $\psi(x_1,\cdots,x_n,y)=0$ 的点成立]. 事实上, 如果 $y=\lambda(x_1,\cdots,x_n)$ 是 (4.3.1) 的一个解, 只须取

$$\psi(x_1,\cdots,x_n,y)=y-\lambda(x_1,\cdots,x_n);$$

证明可立即得到. 由此得

解 (4.3.1) 的方法. 连带作出齐次方程 (4.3.3), 然后考虑它的特征方程组

$$\frac{dx_1}{f_1}=\cdots=\frac{dx_n}{f_n}=\frac{dy}{f};$$

求出 n 个首次积分

$$\psi_1(x_1,\cdots,x_n,y),\cdots,\psi_n(x_1,\cdots,x_n,y),$$

它们的导数是线性无关的线性形式; 然后取

$$\psi(x_1,\cdots,x_n,y)=\Phi(\psi_1,\cdots,\psi_n),$$

其中 Φ 是任意的函数, 但还是要满足 $\partial\psi/\partial y\neq 0$. 那么从方程 $\psi(x_1,\cdots,x_n,y)=0$ 解出 y, 就得到 (4.3.1) 的最一般的解.

4.4. 例

例 1. 在 $\mathbb{R}^3$ 中取坐标 x,y,z [代替 x_1,x_2,y]. 设有含 x 及 y 的未知函数 z 的方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z. \tag{4.4.1}$$

现在 (a,b,c) (非原点) 的邻域中进行论证. 特征方程组是

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z};$$

例如如果 $a\neq 0$, 我们有两个首次积分

$$\frac{y}{x} \quad 及 \quad \frac{z}{x}.$$

因此通解是

$$z=x\cdot\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

其中 φ 是任意的一元函数. 我们看出这是顶点在原点 O 的锥的方程. 于是 (4.4.1) 是顶点为 O 的锥的偏微分方程. 而且如果有一曲面 $z=f(x,y)$, 它的切面通过原点, 那么正好得到

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=f(x,y).$$

例 2. 设下列方程含 x,y,z 的未知函数 f:

$$-y\frac{df}{dx}+x\frac{\partial f}{\partial y}+(1+z^2)\frac{\partial f}{\partial z}=3zf. \tag{4.4.2}$$

特征方程组是

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{1+z^2}=\frac{df}{3zf}$$

(含四个变量 x,y,z,f 的微分方程组). 我们有三个首次积分:

$$x^2+y^2, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\operatorname{arctg} z, (1+z^2)^{-\frac{3}{2}}f,$$

它们的导数线性无关. 由此得 (4.4.2) 的通解:

$$f=(1+z^2)^{\frac{3}{2}}\Phi\left(x^2+y^2, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\operatorname{arctg} z\right), \tag{4.4.3}$$

其中 Φ 是两个变量的任意函数.

说明: (4.4.2) 表明二阶微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)$$

对于围绕原点的旋转群 [在平面 $\mathbb{R}^2$ 中, 取坐标 x,y] 不变. 那么 (4.4.3) 表明这样的方程属于下列类型:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\Phi\left(x^2+y^2, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\operatorname{arctg} y'\right).$$

几何解释是怎样的?

习题

习题 1. 设 E 是一巴拿赫空间. 对于 $A, B \in \mathscr{L}(E; E)$, 令 $[A, B] = B \circ A - A \circ B$. 证明: 如果

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0,$$

那么就有

$$\begin{aligned}\exp(A+B) &= \exp(A) \circ \exp(B) \circ \exp\left(\frac{1}{2}[A, B]\right) \\ &= \exp(B) \circ \exp(A) \circ \exp\left(\frac{1}{2}[B, A]\right).\end{aligned}$$

(a) 对于固定的 x_0, 令

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \exp(tA) \cdot x_0 \\ x_2(t) &= \exp(t, B) \cdot x_1 \\ x_3(t) &= \exp(-t(A+B)) \cdot x_2.\end{aligned}$$

证明

$$\frac{dx_3}{dt} = \exp(-t(A+B)) \circ \varphi(t) \circ \exp(tB) \circ \exp(tA) \cdot x_0,$$

其中

$$\varphi(t) = -A + \exp(tB) \circ A \circ \exp(-tB).$$

(b) 计算 $\varphi'(t)$. 由此导出 $x_3 = \exp\left(\frac{t^2}{2}[A, B]\right) \cdot x_0$, 然后导出所求结果.

习题 2. 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征值与相应的特征子空间 E_i. 应用 $\exp(tA_i)$, 其中 A_i 是 A 在 E_i 中的限制, 解微分方程

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x.$$

习题 3. 对于 $x \in \mathbb{R}$, 令

$$\begin{aligned}u(x) &= \int_0^\infty e^{-t} \sin tx \frac{dt}{\sqrt{t}}, \\ v(x) &= \int_0^\infty e^{-t} \cos tx \frac{dt}{\sqrt{t}}.\end{aligned}$$

证明 u 及 v 属于 C^1 类, 并且是一个一阶微分方程组的解. 由此导出 u 及 v 的值.

习题 4. 求出微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = 2x \end{cases}$$

的预解式. 由此导出下列矩阵的表达式

$$\exp(tA), \quad 其中\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

习题 5. 考虑实值函数序列 y_n; 这些函数是由下列递推关系式确定的:

$$\begin{aligned} & y_0(x) = 1 \\ & y_n(x) = 1 + \int_0^x [y_{n-1}(t)]^2 dt. \end{aligned}$$

证明 y_n 是 $2^n - 1$ 次多项式, 这多项式的所有系数包含在 0 和 1 之间. 证明: 在 $|x| < 1$ 时, 对于 $n \to \infty, y_n(x)$ 趋近于一极限, 而且这极限是微分方程 $y' = y^2$ 的解中对 $x = 0$ 取值 1 的一解.

习题 6. 设 $V_1(x), \cdots, V_n(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 内原点的邻域中 n 个 C^1 类向量场, 并且 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中固定的一点. 设 $\varphi(t, \alpha)$ 是下列方程组

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 V_1(x) + \cdots + \alpha_n V_n(x), \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \tag{1}$$

的解中对于 $t = 0$ 为零的一解.

(a) 证明如果 α 与原点充分接近, $\varphi(t, \alpha)$ 对 $|t| \leqslant h, h > 1$ 确定.

(b) 证明 $\varphi(t, \alpha)$ 只与乘积 $\alpha_1 t, \cdots, \alpha_n t$ 有关 (可证明

$$\Delta\varphi = t\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0,$$

先证明 φ 是适当的线性方程的解).

(c) 假定 n 个向量 $V_1(0), \cdots, V_n(0)$ 线性无关, 证明映射 $\varphi \mapsto \varphi(1, \alpha)$ 是从 O 的一个邻域到 O 的一个邻域上的 C^1 微分同胚. 设 ψ 是逆微分同胚.

(d) 在 (c) 中假设下, 证明方程组 (1) 在原点为零的解可写成: 对于 t 充分小,

$$\varphi(t, \alpha) = \psi(t, \alpha).$$

习题 7. 设有微分方程

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x, \tag{1}$$

其中实变数 t 的未知映射 x 在复巴拿赫空间 E 中取值, 并且 A 是 $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E;E)$ 中的已给元素. 证明: 如果 (1) 以下列映射作为解: 对于 $-\infty < t < +\infty$,

$$x = e^{r_1 t}u_1 + e^{r_2 t}u_2$$

(其中 $u_1 \in E, u_2 \in E, r_1 \in \mathbb{C}, r_2 \in \mathbb{C}$, 而且 $r_1 \neq r_2$), 那么 (1) 以下列每个映射作为解: $e^{r_1 t}u_1$ 及 $e^{r_2 t}u_2$. 如果 (1) 以下列映射作为解: 对于 $-\infty < t < +\infty$,

$$x = e^{rt}(u + tv)$$

(其中 $u \in E, v \in E, r \in \mathbb{C}$), 可以得到怎样的结论? 证明: 在这种情形下, 如果我们有 $v \neq 0$, 那么 u 与 v 不成正比; 还证明: 自同态的核 $(A - r \cdot 1_E)^2$ (E 的子向量空间, 由在其上自同态为零的向量所组成) 的维数 $\geqslant 2$.

习题 8. 考虑下列形状的微分方程组:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \alpha\frac{dx}{dt} + \beta\frac{dy}{dt} + \gamma x + \delta y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \alpha_1\frac{dx}{dt} + \beta_1\frac{dy}{dt} + \gamma_1 x + \delta_1 y, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\alpha, \beta, \cdots, \delta_1$ 是 (复) 常数, 并且 $x(t)$ 及 $y(t)$ 是取复数值的未知函数. 现要选取系数 $\alpha, \cdots, \delta_1$, 使方程组 (1) 有两组特解:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} x = e^t \\ y = te^t. \end{cases}$$

证明: 方程中系数是唯一确定的, 并且 (对于这些系数的值) 求 (1) 的所有解.
[如果想避免明显算出系数 $\alpha, \cdots, \delta_1$, 可应用上题中的结果.]

习题 9. 设 $t \mapsto A(t)$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 的连续映射, 并且设 $X(t)$ 是方程

$$\frac{dX}{dt} = A(t) \circ X$$

的解. 假定矩阵 $A(t)$ 对任何 $t \in \mathbb{R}$ 是反对称的, ${}^tX \circ X$ 满足什么微分方程? 由此导出: 如果 $X(t_0)$ 是正交矩阵, 那么 $X(t)$ 对任何 t 是正交矩阵.

习题 10. 设 E 是巴拿赫空间, A 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathscr{L}(E;E)$ 的周期连续映射, 周期是 ω; 用 $R(t, t_0)$ 表示下列微分方程的预解式:

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x \tag{1}$$

(a) 证明　$R(t + \omega, t_0 + \omega) = R(t, t_0)$.

(b) 设 x_0 是 $R(\omega, 0)$ 的一个特征向量, 与特征值 λ 相应; 设 $x(t)$ 是 (1) 的解, 它证明 (1) 对于 $t = 0$ 取值 x_0 的解 $x(t)$ 满足

$$x(t + \omega) = \lambda x(t).$$

习题 11. 设 E 是一巴拿赫空间, $F=\mathscr{L}(E;E)$, 并且 $I=]a,b[$ 是 $\mathbb{R}$ 中开区间. 用 A,B,C,D 表示从 I 到 F 的连续映射.

(a) 设 $U(t)$ 是方程

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\circ x$$

的解; 对于 $t=t_0\in I, U(t)$ 等于从 E 到 E 的恒等映射. 证明 $U(t)$ 对任何 t 可逆 (可以证明 $U(t)$ 的逆是微分方程 $dY/dt=-Y\circ A(t)$ 的解).

(b) 设 U 及 V 分别是方程 $dX/dt=A(t)\circ X, dX/dt=X\circ B(t)$ 的解, 对于 $t=t_0$, 它们等于恒等映射.

证明方程

$$\frac{dX}{dt}=A(t)\circ X+X\circ B(t)$$

对于 $t=t_0$ 取值 X_0 的解等于 $U\circ X_0\circ V$.

(c) 设 (U,V) 是微分方程组

$$\frac{dX}{dt}=A(t)\circ X+B(t)\circ Y,$$
$$\frac{dY}{dt}=C(t)\circ X+D(t)\circ Y$$

的一组解. 证明: 如果 V 在 I 中可逆, 那么 $W=U\circ V^{-1}$ 是下列黎卡提方程的一解:

$$\frac{dZ}{dt}=B(t)+A(t)\circ Z-Z\circ D(t)-Z\circ C(t)\circ Z.$$

给出一个逆命题.

习题 12. 设 f 是从巴拿赫空间 E 中一个开集 Ω 到巴拿赫空间 F 中的一个可微映射. 假定对任何 $x\in\Omega, f'(x)\in\mathrm{Isom}(E;F)$, 并且导出映射 $x\mapsto f'(x)$ 是李普希茨的. 令 $(f'(x))^{-1}=L(x)$, 并且 $a\in\Omega, b=f(a)$.

(a) 对于 Ω 中固定的 y, 考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt}=L(x(t))\cdot(y-b).$$

证明: 对于 $\|y-b\|$ 充分小, 这微分方程有一解 $\varphi(t;y)$, 它对于 $|t|<2$ 确定, 并且满足 $\varphi(0;y)=a$ [可应用定理 1.7.2 叙述后所提出的准确性].

(b) 证明 $(d/dt)[f(\varphi(t;y))]=y-b$, 并且由此导出 $f(\varphi(t))$ 的值. 证明映射 $y\mapsto\varphi(1;y)$ 在 b 的邻域中属于 C^1 类, 并且是 f 在 b 的邻域中的逆映射. (这样我们得到局部反演定理的一个证明, 但所作假设比第一章, 第 4 节中的更强.)

习题 13. 设 E 及 F 是两个巴拿赫空间, $I=]a,b[$ 是 $\mathbb{R}$ 中一个区间, 并且 $t\mapsto A(t)$ 及 $t\mapsto B(t)$ 是从 I 分别到 $\mathscr{L}(E;E)$ 及 $\mathscr{L}(E;F)$ 的连续映射.

(a) $B(t)$ 必须满足什么微分方程 (2), 才可使 $\varphi(t,x)=B(t)\cdot x$ 是微分方程

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\cdot x \tag{1}$$

在 F 中取值的首次积分?

(b) 证明存在着 (2) 的一个解, 在给定的点 $t_0 \in I$ 取给定的值 B_0. 用 B_0 及 (1) 的预解核来表示出这一解.

(c) 假定 $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}$; 用 $a_{ij}(t)$ 表示矩阵 A 中的元素. 证明提出的问题等价于求 n 个数值函数 $y_i(t)$, 使得 $\varphi(t,x) = \sum y_i(t)x_i$ 是 (1) 的首次积分. 写出函数 $y_i(t)$ 必须满足的而且在这种情形下与 (2) 等价的微分方程组 (3).

(d) 在 (c) 中假设下, 证明用上述方法可求出 (1) 的几个独立的首次积分.

应用这些结果求解下列偏微分方程:

$$(y-z)f'_x + (z-x)f'_y + (x-y)f'_z + f'_t = 0.$$

习题 14. 设 E 是巴拿赫空间, $F = \mathscr{L}(E;E)$; I 表示从 E 到 E 的恒等映射.

(a) 对于 $A \in F$, 考虑微分方程

$$\frac{dX}{dt} = -X \circ A \circ X.$$

证明方程右边是 X 的局部李普希茨映射, 并且有 $\mathbb{R}$ 中一个大区间 J 包含原点 $t=0$; 在 J 中存在着微分方程的一个解 $\varphi: J \to F$, 满足 $\varphi(0) = 1$.

(b) 证明 φ 属于 C^∞ 类.

(c) 证明 J 包含区间 $|t| < \|A\|^{-1}$, 并且在这区间中, 我们有 $\varphi(t) = (I + tA)^{-1}$.

习题 15.

(a) 证明微分方程

$$x(x-1)y'' + 3y' - 6y = 0 \tag{1}$$

在原点的邻域中有一个 (三次) 多项式解及解 $1/(1-x)^2$.

(b) 与方程 (1) 相连带的一阶方程组如下:

$$\begin{cases} y' = u, \\ u' = \dfrac{3u - 6y}{x(1-x)}. \end{cases} \tag{2}$$

写出这方程组对于 $x \neq x_0$ 的预解式 $R(x_1, x_0)$.

对于 $x_0 \to 0$, 这预解式变成怎样?

研究在点 $(0, y_0)$ 的邻域中, (1) 的解的性质; 特别要证明两个这样的解的差是 $o(x^3)$.

(c) 应用预解式, 研究方程

$$x(x-1)y'' + 3y' - 6y = 20x^4. \tag{3}$$

证明对于 $x = x_0$, 这方程的解本身及其一阶导数为零的解是

$$y(x, x_0) = \frac{1}{(1-x)^2}\int_{x_0}^{x}(4x^5 - 5x^4 - 4t^5 + 5t^4)dt.$$

证明 $y(x,0)$ 仍有意义, 并且它是 (3) 的解中满足 $f(0)=f'(0)=0$ 的一解. 证明这是 (3) 的满足 $f^{(i)}(0)=0(i=0,1,2,3,4)$ 的唯一解.

习题 16. 设在 $\mathbb{R}^n$ 的开集 Ω 中有 C^1 类向量场 $x\mapsto f(x)$; 设方程

$$\frac{dx}{dt}=f(x)$$

对于 $t=0$ 取值 u 的解是 $\varphi_t(u)=\varphi(t,u)$. 考虑上述向量场及由 $\varphi(t,u)$ 所定义的含一个参变量之群的核.

写出矩阵 $M_t=(\partial\varphi/\partial u)(t,u)$ 所满足的微分方程. 证明 φ_t 使体积保持不变必须而且只须 $\det(M_t)=1$.

由此导出: φ_t 使体积保持不变的条件是: $f'(x)$ 的迹是零. [应用这一事实: 如果矩阵 X 对一参变量 t 可导, 那么它的行列式满足关系式

$$\frac{d\Delta}{dt}=\Delta\cdot\operatorname{Tr}\left(\frac{dX}{dt}\cdot X^{-1}\right).]$$

习题 17. 积出下列偏微分方程:

$$\begin{aligned}
&\cos x\cos y\frac{\partial u}{\partial x}-\sin x\sin y\frac{\partial u}{\partial y}+\sin x\cos y\frac{\partial u}{\partial z}=0,\\
&yz\frac{\partial u}{\partial x}+zx\frac{\partial u}{\partial y}+xy\frac{\partial u}{\partial z}+xyz=0,\\
&x(cz-by)\frac{\partial z}{\partial x}+y(ax-cz)\frac{\partial z}{\partial y}=z(by-ax),\\
&a(a^2+xy)\left(x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}\right)+(x^2+y^2)z^2=0.
\end{aligned}$$

习题 18. (a) 确定平面 (x,y) 上的曲线, 使得对于它们, 方程

$$(xy'-y)^2-2xy(1+y'^2)=0$$

有 y' 的二重根 (可找到三条直线).

(b) 找出微分方程的奇异积分.

(c) 积出上列微分方程 (例如可通过采用极坐标), 并且证明奇异积分是解曲线的包络.

在 (a) 中求出的第三条直线起着什么作用?

习题 19. (a) 求出下列二阶方程的首次积分:

$$(x-t)\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+1=0.$$

令 $u=\operatorname{arctg}(dx/dt)$, 积出上列方程.

(b) 积出下列偏微分方程:

$$y(x-t)\frac{\partial t}{\partial x}-(1+y^2)\frac{\partial t}{\partial y}+t-x=0.$$

习题 20. 积出下列微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + \dfrac{z}{2}. \end{cases}$$

由此导出下列方程的解:

$$(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} + (2x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y + \frac{z}{2}.$$

下编　微分形式

第一章　微分形式

1. 交错多重线性映射

1.1. 交错多重线性映射的定义

以下讲述的一部分在纯粹代数范围内, 适用于任何交换域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间 (对域的特性不作限制). 但是我们只对域 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的赋范向量空间进行讲述; 为了概念明确, 假定只讲 $\mathbb{R}$ 上的赋范向量空间.

设 E 及 F 是两个赋范 e.v. 我们已经考虑过连续 p 重线性映射 $E^p \to F$ 所构成的赋范向量空间 $\mathscr{L}_p(E;F)$; 对于 $p=1$, 它简单地就是 $\mathscr{L}(E;F)$; 对于 $p=0$, 约定记 $\mathscr{L}_0(E;F)=F$. 我们也已考虑过对称 p 重线性映射所构成的 $\mathscr{L}_p(E;F)$ 的子向量空间. 现在要引进 $\mathscr{L}_p(E;F)$ 的另一子空间 $\mathscr{A}_p(E;F)$.

定义. 设映射 $f \in \mathscr{L}_p(E;F)$. 如果只要至少对于一个指标 $i(1 \leqslant i < p), x_i = x_{i+1}, f(x_1,\cdots,x_p)$ 就是零, 那么映射 f 就叫做交错的. [我们约定, 对于 $p=1$, 任何线性映射 $E \to F$ 是交错的.]

显然, 交错 p 重线性映射构成 $\mathscr{L}_p(E;F)$ 的一个子向量空间; 把它记作 $\mathscr{A}_p(E;F)$. 我们有 $\mathscr{A}_1(E;\mathbb{K})=\mathscr{L}(E;F)$; 作为定义, $\mathscr{A}_0(E;F)=F$.

子向量空间 $\mathscr{A}_p(E;F)$ 在 $\mathscr{L}_p(E;F)$ 中是闭的; 事实上, 设 $f \in \mathscr{L}_p(E;F)$ 是序列 $f_n \in \mathscr{A}_p(E;F)$ 的极限; 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0$; 当固定 $x_1,\cdots,x_p \in E$ 时, $f_n(x_1,\cdots,x_p)$ 的序列更加有极限 $f(x_1,\cdots,x_p)$. 因此如果 $x_i=x_{i+1}$, 我们有

$$f(x_1,\cdots,x_p)=\lim_n f_n(x_1,\cdots,x_p)=0.$$

证完.

在讲述交错多重线性映射的其他性质之前, 需要关于排列群的一些初步结果.

1.2. 排列群

设 $\{1,\cdots,p\}$ 是前 p 个整数 (>0) 构成的序列, 并且设 Σ_p 是序列 $\{1,\cdots,p\}$ 的所有排列构成的群. 我们知道 Σ_p 含 $p!$ 个元素. 如果排列 $\sigma\in\Sigma_p$ 满足下列条件: 存在着两个不同的整数 i 及 $j(1\leqslant i\leqslant p,1\leqslant j\leqslant p)$, 使得

$$\begin{cases}\sigma(i)=j, \quad \sigma(j)=i,\\ \sigma(k)=k \quad \text{对于与 } i \text{ 及 } j \text{ 不同的任何整数 } k,\end{cases}$$

那么 σ 就叫做一个转置. (总之, σ 交换 i 及 j.) 显然, σ^2 是恒等映射. 已知任何排列 $\sigma\in\Sigma_p$ 是一些转置的乘积, 其中每个转置交换相邻两整数; 而且可以证明 (例如在任何讲述行列式理论的初步知识中), 不论把 σ 怎样写成一些转置的乘积, 这些转置个数的奇偶性不会改变.

于是我们引进排列 σ 的标记, 记作 $\varepsilon(\sigma)$; 它是一个整数: 当 σ 是偶数个转置的乘积时, $\varepsilon(\sigma)=+1$; 当 σ 是奇数个转置的乘积时, $\varepsilon(\sigma)=-1$.

从群 Σ_p 到含两个元素 $+1$ 及 -1 的乘法群的映射 $\sigma\mapsto\varepsilon(\sigma)$ 是群的同态; 并且如果 σ 是一个转置, 我们有 $\varepsilon(\sigma)=-1$.

现设 E 及 F 是两个集, 并且 f 是一映射 $\underbrace{E\times\cdots\times E}_{p\text{ 个 }E}\to F$. 对于 $\sigma\in\Sigma_p$, 把下式确定的映射 $E\times\cdots\times E\to F$ 记作 σf:

$$(\sigma f)(x_1,\cdots,x_p)=f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(p)}). \tag{1.2.1}$$

(总之, σf 由 f 通过变量的排列确定.) 显然, 如果 σ 是恒等映射, $\sigma f=f$. 而且我们有: 对于 $\sigma\in\Sigma_p,\tau\in\Sigma_p$,

$$(\tau\sigma)f=\tau(\sigma f). \tag{1.2.2}$$

事实上, 令 $\sigma f=g$; 那么

$$(\tau g)(x_1,\cdots,x_p)=g(x_{\tau(1)},\cdots,x_{\tau(p)}).$$

令 $y_i=x_{\tau(i)}$; 由 (1.2.1), 我们有

$$g(y_1,\cdots,y_p)=f(y_{\sigma(1)},\cdots,y_{\sigma(p)}),$$

并且由于 $y_{\sigma(i)}=x_{\tau\sigma(i)}$, 最后得到 $\tau(\sigma f)$ 是映射

$$(x_1,\cdots,x_p)\mapsto f(x_{\tau\sigma(1)},\cdots,x_{\tau\sigma(p)}).$$

这样就证明了关系式 (1.2.2).

这关系式表明群 Σ_p 在映射集 $E^p\to F$ 中作左运算.

1.3. 交错多重线性映射的性质

E 及 F 重新表示两个赋范巴拿赫空间.

命题 1.3.1. 设 $f \in \mathscr{L}_p(E;F)$ 是一个交错多重线性映射. 那么:
(i) 每当对于一对不同的指标 (i,j), 我们有 $x_i = x_j$ 时, 就有 $f(x_1,\cdots,x_p)=0$;
(ii) 对于序列 $[1,\cdots,p]$ 的任何排列 σ, 我们有

$$f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)f(x_1,\cdots,x_p), \tag{1.3.1}$$

其中 $\varepsilon(\sigma)=\pm1$ 是排列 σ 的标记.

在作证明前, 先作一点说明: 性质 (i) 推广了用来确定交错映射的性质; 它表明 $f(x_1,\cdots,x_p)=0$, 只要变量中有两个取相等的值.

证 先证明论断 (ii). 作为开始, 证明当 σ 是交换两相邻指标 i 及 $i+1$ 的一个转置时, 关系式 (1.3.1) 是正确的; 因此要证明的是

$$g(x_{i+1},x_i) = -g(x_i,x_{i+1}), \tag{1.3.2}$$

这里为了简单起见, 已令

$$g(x_i,x_{i+1}) = f(x_1,\cdots,x_i,x_{i+1},\cdots,x_p).$$

映射 g 是交错双线性的; 因此有

$$\begin{aligned} g(x_i+x_{i+1},x_i+x_{i+1}) = g(x_i,x_i) &+ g(x_{i+1},x_{i+1}) \\ &+ g(x_i,x_{i+1}) + g(x_{i+1},x_i). \end{aligned}$$

并且由于上式中前三项是零, 我们正好得到要证明的关系式 (1.3.2).

现证明在一般情形下的关系式 (1.3.1). 用 1.2 段中引进的记号, 这关系式可写成

$$\sigma f = \varepsilon(\sigma) f; \tag{1.3.3}$$

既然 $(\sigma_1\sigma_2)f = \sigma_1(\sigma_2 f)$ 并且 $\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$, 我们看出: 如果 (1.3.3) 对于 $\sigma=\sigma_1$ 以及对于 $\sigma=\sigma_2$ 都是正确的, 那么它对 $\sigma=\sigma_1\sigma_2$ 是正确的. 然而当 σ 是交换相邻两指标的一个转置时, (1.3.3) 是正确的; 因此它对任何有限个这种转置的乘积也是正确的; 而且由于任何排列可写成一个这样的乘积, (1.3.3) 对任何 $\sigma \in \Sigma_p$ 正确. 这就证明了论断 (2).

余下只要证明论断 (i). 假定 $x_i = x_j (i \neq j)$; 存在着一个排列 σ, 使得 $\sigma(1) = i, \sigma(2) = j$; 既然 f 是交错的, 我们有

$$f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(p)}) = 0,$$

又因上式左边等于 $\pm f(x_1,\cdots,x_p)$, 我们有 $f(x_1,\cdots,x_p)=0$, 证完.

注意. 以上结果可应用于任何域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间 E 及 F. 但是当 $\mathbb{K}$ 的特征 $\neq 2$ 时 (这正是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 的情形), 对于多重线性映射, 由性质 (ii) 可导出映射是交错的. 事实上, 在 σ 是交换 i 及 j 的转置情形, 关系式 (1.3.1) 表明: 如果 $x_i = x_{i+1}$, 我们有

$$f(x_1, \cdots, x_p) = -f(x_1, \cdots, x_p),$$

由此得

$$2f(x_1, \cdots, x_p) = 0;$$

如果可用 2 除, 就得到 $f(x_1, \cdots, x_p) = 0$.

有性质 (ii) 的多重线性映射 f 叫做反对称的; 简单地写作 $\sigma f = \varepsilon(\sigma) f$.

因此在我们所关心的情形 ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$), 交错多重线性映射的空间 $\mathscr{A}_p(E; F)$ 就是反对称多重线性映射的空间.

1.4. 交错多重线性映射的乘法

设 $f \in \mathscr{A}_p(E; F)$ 并且 $g \in \mathscr{A}_q(E; G)$ 为了定义 f 及 g 之间的乘积, 必须先给出一个连续双线性映射

$$\Phi : F \times G \to H$$

(在一个赋范 e.v. H 中取值). 于是连带着 f 及 g, 可取一映射 $h : E^{p+q} \to H$, 即

$$h(x_1, \cdots, x_{p+q}) = \Phi(f(x_1, \cdots, x_p), g(x_{p+1}, \cdots, x_{p+q})). \tag{1.4.1}$$

映射 h 显然是连续多重线性的. 但它一般不是交错的: 它只属于 $(p+q)$ 重线性映射的向量空间; 这种映射作为前 p 个变量 $x_1, \cdots, x_p$ 的映射是交错的, 作为后 q 个变量 $x_{p+1}, \cdots, x_{p+q}$ 的映射也是交错的, 把这种空间记作 $\mathscr{A}_{p,q}(E; H)$.

我们要指出一种典范方法, 用来连带着任何 $h \in \mathscr{A}_{p,q}(E; H)$, 作出一个 $\widetilde{h} \in \mathscr{A}_{p+q}(E; H)$. 准确地说, 我们要定义一个连续线性映射

$$\varphi_{p,q} : \mathscr{A}_{p,q}(E; H) \to \mathscr{A}_{p+q}(E; H).$$

作为定义, $\varphi_{p,q}(h)$ 是多重线性映射

$$\widetilde{h} = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)(\sigma h), \tag{1.4.2}$$

在 $\{1, \cdots, p+q\}$ 的排列中, 上列和式是对其中所有满足下列条件的排列 σ 作出的:

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \quad 及 \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q). \tag{1.4.3}$$

对于这样的排列 σ, 我们有直观的想法: 在一种纸牌游戏中, 取两叠纸牌, 第一叠有 p 张纸牌, 第二叠有 q 张纸牌 (第一叠中的牌分别编号从 1 到 p, 第二叠中的牌分别编号从 $p+1$ 到 $p+q$). 如果 "洗牌" 一次, 把第二叠牌插入第一叠, 那么纸牌就依序

排列, 使得原有每叠中牌的次序关系保持不变. 换句话说, "洗牌" 确定了所有纸牌集的满足 (1.4.3) 的一种排列 σ. 反过来说, 给出满足 (1.4.3) 的一种排列 σ, 也就是给出了如上 "洗牌" 后, 纸牌所可能得到的一种排列. 可以看出, 这种排列 σ 的个数是

$$\frac{(p+q)!}{p!q!}.$$

我们必须证明 (1.4.2) 所确定的映射 $\widetilde{h}$ 正好是交错的, 设已给向量序列 $x_1, \cdots, x_{p+q} \in E$, 其中两个相邻的向量相等: $x_i = x_{i+1}$; 要证明 $\widetilde{h}(x_1, \cdots, x_{p+q})$ 是零, 也就是

$$\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) h(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p+q)}) = 0. \tag{1.4.4}$$

为了证明 (1.4.4), 把满足 (1.4.3) 的排列 σ 分成两类: 1) 有满足下列条件的 σ : $\sigma^{-1}(i)$ 及 $\sigma^{-1}(i+1)$ 都是 $\leqslant p$ 的整数, 或者都是 $\geqslant p+1$ 的整数. 在第一种情形下, x_i 及 x_{i+1} 两数都出现在 $h(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p+q)})$ 中的前 p 个变量内, 因此 (1.4.4) 中相应的项是零 (h 是前 p 个变量的交错映射). 在第二种情形下, 由类似理由, (1.4.4) 中相应的项也是零. 2) 其他 σ 可分成两子类: 第一子类中的 σ 满足 $\sigma^{-1}(i) \leqslant p$ 并且 $\sigma^{-1}(i+1) \geqslant p+1$; 第二子类中的 σ 满足 $\sigma^{-1}(i) \geqslant p+1$ 并且 $\sigma^{-1}(i+1) \leqslant p$. 设 τ 是使 i 及 $i+1$ 互相交换的转置. 如果 σ 在第一子类中, $\tau\sigma$ 就在第二子类中, 并且反过来也正确. 在 (1.4.4) 式左边, 除与 1) 中所考虑的 σ 相应各项外, 其余各项可以两两结合进行讨论: 对于满足 $\sigma^{-1}(i) \leqslant p, \sigma^{-1}(i+1) \geqslant p+1$ 的 σ, 取

$$\varepsilon(\sigma) h(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p+q)}) - \varepsilon(\sigma) h(x_{\tau\sigma(1)}, \cdots, x_{\tau\sigma(p+q)}). \tag{1.4.5}$$

要证明上式是零, 这样就完成了关系式 (1.4.4) 的证明: 序列 $\tau\sigma(1), \cdots, \tau\sigma(p+q)$ 事实上是从序列 $\sigma(1), \cdots, \sigma(p+q)$ 中交换 i 及 $i+1$ 的位置导出, 并且由于 $x_i = x_{i+1}$, (1.4.5) 的值当然是 0.

这样已由 (1.4.2) 确定了典范线性映射

$$\varphi_{p,q} : \mathscr{A}_{p,q}(E; H) \to \mathscr{A}_{p+q}(E; H),$$

可以给出下列定义:

定义. 设 $f \in \mathscr{A}_p(E; F), g \in \mathscr{A}_q(E; G), \Phi : E \times G \to H$. 我们把元素 $\varphi_{p,q}(h) \in \mathscr{A}_{p+q}(h)$ 叫做 f 及 g 关于 Φ 的外乘积, 记作

$$f \wedge_{\Phi} g,$$

这里 h 是 (1.4.1) 所确定的 $\mathscr{A}_{p,q}(E; H)$ 中的元素. 用公式写出:

$$(f \wedge_{\Phi} g)(x_1, \cdots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \Phi(f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p)}), g(x_{\sigma(p+1)}, \cdots, x_{\sigma(p+q)})), \tag{1.4.6}$$

其中 σ 取遍集 Σ'_{p+q} 中的元素; Σ'_{p+q} 表示 $\{1,\cdots,p+q\}$ 的所有满足 (1.4.3) 的排列构成的集 [想到纸牌游戏!].

例. 取 $p=1,q=1$ 情形; $f\in\mathscr{L}(E;F)$ 及 $g\in\mathscr{L}(E;G)$ 是线性映射. 那么 $f\wedge_\Phi g\in\mathscr{A}_2(E;H)$ 是双线性映射

$$(x_1,x_2)\mapsto\Phi(f(x_1),g(x_2))-\Phi(f(x_2),g(x_1)). \tag{1.4.7}$$

在这种简单情形下, 我们立即看出它是交错的, 因为上式右边对于 $x_1=x_2$ 是零.

更一般, 设 $p=1,q$ 是任何非负整数; 那么

$$(f\wedge_\Phi g)(x_0,x_1,\cdots,x_q)=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\Phi(f(x_i)g(x_0,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_q)). \tag{1.4.8}$$

下面要用记号

$$g(x_0,\cdots,\widehat{x}_i,\cdots,x_q)$$

表示序列 $x_0,\cdots,x_i,\cdots,x_q$ 中, 除去了指标是 i 的项.

一种更简单的情形是 $p=0,q$ 是任何正整数情形; 因为 $f\in F$ 是常数, 所以我们简单地有

$$(f\wedge_\Phi g)(x_1,\cdots,x_q)=\Phi(f,g(x_1,\cdots,x_q)).$$

我们往往采用这样的乘积 $f\wedge_\Phi g$: 取 $g=\mathbb{R},H=F$, 并且映射 $\Phi:F\times\mathbb{R}\to F$ 简单地是 F 中向量与纯量的乘积. 这种情形下, 在记号 $f\wedge g$ 中省去了字母 Φ. 更特殊. 如果 $F=\mathbb{R}$, 两个交错多重线性形式的乘积 $f\wedge g$ 是一个交错多重线性形式.

还更特殊, 设 $f\in\mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ 及 $g\in\mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ 是两个线性形式; 它们的乘积 $f\wedge g$ 是 $\mathscr{A}_2(E;\mathbb{R})$ 中的一个元素: 由 (1.4.7), 这元素是由下列公式给出的:

$$(f\wedge g)(x_1,x_2)=f(x_1)g(x_2)-f(x_2)g(x_1). \tag{1.4.9}$$

考虑从 $\mathscr{L}(E;\mathbb{R})\times\mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ 到 $\mathscr{A}_2(E;\mathbb{R})$ 中的映射

$$(f,g)\mapsto f\wedge g.$$

它是交错双线性的: 双线性是明显的; 交错性是因为如果 $g=f$, 由关系式 (1.4.9) 及内积的交换性,

$$(f\wedge f)(x_1,x_2)=f(x_1)f(x_2)-f(x_2)f(x_1)=0$$

亦即 $f\wedge f=0$.

1.5. 外乘法的性质

映射 $(f,g)\mapsto f\wedge_\Phi g$ 是双线性的: 如果固定 $g,f\wedge_\Phi g$ 与 f 线性相关; 而且如果固定 $f,f\wedge_\Phi g$ 与 g 线性相关.

命题 1.5.1. 设 $f \in \mathscr{A}_p(E;\mathbb{R})$ 以及 $g \in \mathscr{A}_q(E;\mathbb{R})$ 是两个 (取纯量值的) 交错多重线性形式. 那么

$$g \wedge f = (-1)^{pq} f \wedge g \tag{1.5.1}$$

(表明这一性质, 可说交错形式的外乘法是反交换的).

证. 我们有

$$(g \wedge f)(x_1, \cdots, x_{p+q}) = \sum_{\tau} \varepsilon(\tau) g(x_{\tau(1)}, \cdots, x_{\tau(q)}) f(x_{\tau(q+1)}, \cdots, x_{\tau(p+q)}), \tag{1.5.2}$$

其中 τ 取遍 $\{1, \cdots, p+q\}$ 的排列集中满足下列条件的所有元素:

$$\tau(1) < \cdots < \tau(q) \quad 及 \quad \tau(q+1) < \cdots < \tau(q+p). \tag{1.5.3}$$

引进排列 α, 它把序列 $\{1, \cdots, p+q\}$ 变换成序列

$$\{q+1, \cdots, q+p, 1, \cdots, q\}.$$

我们有, 对于 $1 \leqslant i \leqslant q, \tau(i) = \tau\alpha(p+i)$, 并且对于 $q+1 \leqslant j \leqslant q+p, \tau(j) = \tau\alpha(j-q)$.

令 $\tau\alpha = \sigma$; 那么由 (1.5.3) 可导出 σ 满足 (1.4.3). 反过来, 如果 σ 满足 (1.4.3), 那么 $\tau = \sigma\alpha^{-1}$ 满足 (1.5.3). 此外, $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\alpha)$, 并且 $\varepsilon(\alpha) = (-1)^{pq}$, 这是因为为了实现 α, 必须逐次把 $1, \cdots, q$ 与 $q+1, \cdots, q+p$ 交换, 这样就要作 pq 次转置. 于是 (1.5.2) 可写成

$$(g \wedge f)(x_1, \cdots, x_{p+q}) = (-1)^{pq} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) g(x_{\sigma(p+1)}, \cdots, x_{\sigma(p+q)}) f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p)}),$$

其中 σ 取遍满足 (1.4.3) 的排列的集中所有元素. 由于纯量的乘法是交换的, 在上式右边每个乘积中,

$$g(x_{\sigma(p+1)}, \cdots, x_{\sigma(p+q)}) \quad 与 \quad f(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p)})$$

可以交换. 因此可看出上式右边等于

$$(-1)^{pq} (f \wedge g)(x_1, \cdots, x_{p+q}).$$

关系式 (1.5.1) 于是得证.

命题 1.5.2. 交错多重线性形式的乘法是结合的. 换句话说, 如果 $f \in \mathscr{A}_p(E;\mathbb{R})$, $g = \mathscr{A}_q(E;\mathbb{R}), h \in \mathscr{A}_r(E;\mathbb{R})$, 我们有

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h). \tag{1.5.4}$$

为了证明, 需要下列引理:

引理 1.5.3.　设 p,q,r 是三个整数 >0. 设 $\mathscr{A}_{p,q,r}(E;F)$ 是 $\mathscr{L}_{p+q+r}(E;F)$ 的子空间, 它是由这样的映射形成的: 关于前 p 个变量是交错的, 关于随后 q 个变量是交错的, 并且关于最后 r 个变量也是交错的, 考虑图解

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{A}_{p,q,r}(E;F) & \xrightarrow{\varphi_{p,q}} & \mathscr{A}_{p+q,r}(E;F)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_{q,r}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_{p+q,r}}\\ \mathscr{A}_{p,q+r}(E;F) & \xrightarrow{\varphi_{p,q+r}} & \mathscr{A}_{p+q+r}(E;F).\end{array}$$

在这图解中, $\varphi_{p,q}$ 把 $u\in\mathscr{A}_{p,q,r}(E;F)$ 变换成关于前 $p+q$ 变量是交错的 $\widetilde{u}$ (后 r 个变量不变), 即

$$\widetilde{u}(x_1,\cdots,x_{p+q+r})=\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)u(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(p+q+r)}),$$

上式求和是对这样的排列 σ 作出的: 它们使 $p+q+1,\cdots,p+q+r$ 不变, 并且满足 (1.4.3). 同样确定 $\varphi_{q,r}$ (它涉及使 $1,\cdots,p$ 不变的排列 σ). 于是上列图解是交换的; 换句话说:

$$\varphi_{p+q,r}\circ\varphi_{p,q}=\varphi_{p,q+r}\circ\varphi_{q,r}.$$

[这就是引理的论断].

引理的证明.　要证明: 如果 $u\in\mathscr{A}_{p,q,r}(E;F)$, 那么下列交错映射

$$\varphi_{p+q,r}(\varphi_{p,q}(u))\quad 及\ \varphi_{p,q+r}(\varphi_{q,r}(u))$$

中每一个等于确定如下的映射 v

$$v(x_1,\cdots,x_{p+q+r})=\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)u(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(p+q+r)}),$$

其中 σ 取遍 $\{1,\cdots,p+q+r\}$ 的排列集中满足下列条件的所有排列:

$$\begin{cases}\sigma(1)<\cdots<\sigma(p),\quad \sigma(p+1)<\cdots<\sigma(p+q),\\ \sigma(p+q+1)<\cdots<\sigma(p+q+r).\end{cases}\tag{1.5.5}$$

如果我们考虑一种纸牌游戏, 这差不多是直观的: 提取三叠纸牌, 分别含 p 张、q 张及 r 张牌. 运算 $\varphi_{p,q}$ 相应于洗前两叠牌; 然后 $\varphi_{p+q,r}$ 相应于洗这样得到的一叠牌以及第三叠牌. 采用另一种方式, $\varphi_{q,r}$ 相应于洗后两叠牌, 然后 $\varphi_{p,q+r}$ 相应于洗第一叠牌以及洗后两叠牌所得的一叠牌. 采用两种方式, 我们得到洗三叠牌的结果, 这由关于最后所得排列 σ 的条件 (1.5.5) 表明了. 我们只作出这些提示, 请读者写出详细的论证.

现应用引理 1.5.3 来证明命题 1.5.2. 为了有乘积 $(f\wedge g)\wedge h$, 考虑多重线性映射

$$u(x_1,\cdots,x_{p+q+r})=(f(x_1,\cdots,x_p)g(x_{p+1},\cdots,x_{p+q}))h(x_{p+q+1},\cdots,x_{p+q+r});$$

它属于 $\mathscr{A}_{p,q,r}$, 然后对它应用 $\varphi_{p+q,r}\circ\varphi_{p,q}$. 为了得到 $f\wedge(g\wedge h)$, 考虑

$$u_1(x_1,\cdots,x_{p+q+r})=f(x_1,\cdots,x_p)(g(x_{p+1},\cdots,x_{p+q})h(x_{p+q+1},\cdots,x_{p+q+r}))$$

并且对它应用 $\varphi_{p,q+r}\circ\varphi_{q,r}$. 然由纯量乘法的结合性, $u_1=u$. 又由引理, 我们有 $\varphi_{p+q,r}\circ\varphi_{p,q}=\varphi_{p,q+r}\circ\varphi_{q,r}$, 于是等式 (1.5.4) 最后得证.

1.6. n 个线性形式的外乘积

既然外乘法是结合的, 可以考虑任意有限个乘积 $f_1\wedge f_2\cdots\wedge f_n$. 更特别地, 考虑 $f_1,\cdots,f_n$ 是 $\mathscr{A}_1(E;\mathbb{R})=\mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ 中元素情形.

命题 1.6.1. 如果 $f_1,\cdots,f_n$ 是线性形式, 我们有

$$(f_1,\cdots,f_n)(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)f_1(x_{\sigma(1)})\cdots f_n(x_{\sigma(n)}),\tag{1.6.1}$$

和式是对 $\{1,\cdots,n\}$ 的 $n!$ 个排列 σ 作出的.

证. 对 n 递推. 对于 $n=1$, 证明是平凡的; 对于 $n=2$, 已经看到证明了 (关系式 (1.4.7)). 递推证明请读者作为习题作出.

考虑 n 行、n 列的矩阵; 在第 i 行、第 j 列, 有元素 $f_i(x_j)$; 把这矩阵记作 $\{f_i(x_j)\}$. 在 (1.6.1) 的右边, 我们看到这矩阵的行列式的值. 由此得重要的关系式:

$$\boxed{(f_1\wedge\cdots\wedge f_n)(x_1,\cdots,x_n)=\det\{f_i(x_j)\}.}\tag{1.6.2}$$

注意如果固定 $x_1,\cdots,x_n\in E$, (1.6.2) 的两边是 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的交错 n 重线性映射, 事实上, 因已知 (1.4 段) $f\wedge f=0$, 当 $f_i=f_{i+1}$ 时, $f_1\wedge\cdots\wedge f_n$ 是零.

习题. 要使 n 个元素 $f_1,\cdots,f_n\in\mathscr{L}(E;\mathbb{R})=E^*$ 线性相关, 必须而且只须 $f_1\wedge\cdots\wedge f_n=0$. 证明的原则: 1° 如果例如 $f_n=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i f_i$, 我们有 $f_1\wedge\cdots\wedge f_n=0$; 2° 如果 $f_1,\cdots,f_n$ 线性无关, 那么存在着 n 个向量 $x_1,\cdots,x_n\in E$, 使得 $f_i(x_j)=\delta_{ij}$ (克罗内克符号); 换句话说, 矩阵 $\{f_i(x_j)\}$ 是单位矩阵. 因此它的行列式等于 1, 并且我们有

$$(f_1\wedge\cdots\wedge f_n)(x_1,\cdots,x_n)=1,$$

这正好证明了交错 n 重线性形式 $f_1\wedge\cdots\wedge f_n$ 不恒等于零.

1.7. E 有有限维情形

假定 E 有 k 维, 并且选取 E 的一个基. 那么 E 可以看作 $\mathbb{R}^k$. 对于 $i=1,\cdots,k$, 把 $u_i:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ 记作第 i 个坐标形式.

定理 1.7.1. 任何交错 p 线性映射 $f\in\mathscr{A}_p(\mathbb{R}^k;F)$ 可唯一地写成

$$f=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant k}c_{i_1,\cdots,i_p}\,u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_p},\tag{1.7.1}$$

其中常量 $c_{i_1,\cdots,i_p}$ 是 F 中元素

在上式右边, 每项是常量 $c_{i_1,\cdots,i_p}\in F$ 与交错 p 重线性形式 $u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_p}$ 的乘积, 而 $u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_p}$ 是 p 个线性形式的内积.

证. 首先, f 是多重线性映射 (我们记得: 由于 $E=\mathbb{R}^k$ 有有限维, 任何多重线性映射是连续的). 由本书上编《微分学》的第一章 6.2 段, 我们有

$$f(x^1,\cdots,x^p)=\sum_{i_1,\cdots,i_p}c_{i_1,\cdots,i_p}x^1_{i_1}\cdots x^p_{i_p};\tag{1.7.2}$$

其中 $x^1,\cdots,x^p$ 表示 p 个向量; $x^i_1,\cdots,x^i_k$ 表示第 i 个向量 x^i 的坐标; 在和式中, $i_1.\cdots,i_p$ 从 1 到 k 独立地变动.

"系数" $c_{i_1,\cdots,i_p}\in F$ 是由给定的 f 唯一确定的. 如果我们写出

$$f(x^{\sigma(1)},\cdots,x^{\sigma(p)})=\varepsilon(\sigma)f(x^1,\cdots,x^p),$$

由系数的唯一性, 就有

$$c_{i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(p)}}=\varepsilon(\sigma)c_{i_1,\cdots,i_p},\tag{1.7.3}$$

并且特别是只要整数 $i_1,\cdots,i_p$ 中有两个相等, $c_{i_1,\cdots,i_p}$ 是零. 要使以 $c_{i_1,\cdots,i_p}$ 作为系数的 p 重线性映射是交错的, 条件 (1.7.3) 是必要与充分的.

在 (1.7.2) 的右边, 合并可从通过不同的整数 $i_1,\cdots,i_p$ 排列而相互导出的 $p!$ 项. 我们看出

$$f(x^1,\cdots,x^p)=\sum_{i_1<\cdots<i_p}c_{i_1,\cdots,i_p}\left(\sum_\sigma\varepsilon(\sigma)x^{\sigma(1)}_{i_1}\cdots x^{\sigma(p)}_{i_p}\right);$$

对于 $i_1<\cdots<i_p$, 系数 $c_{i_1,\cdots,i_p}$ 可随意选取. 这就是最一般的交错 p 重线性形式. 在上式右边, 由公式 (1.6.1),

$$\sum_\sigma\varepsilon(\sigma)x^{\sigma(1)}_{i_1}\cdots x^{\sigma(p)}_{i_p}$$

就是坐标形式 $u_{i_1},\cdots,u_{i_p}$ 的外乘积 $u_{i_1}\wedge\cdots\wedge u_{i_p}$ 对于 $x^1,\cdots,x^p$ 的值, 这就证明了 (1.7.1).

系 1.7.2. 如果 $p > k$, 向量空间 $\mathscr{A}_p(\mathbb{R}^k;\mathbb{R})$ 化为 0. [事实上, 没有严格增序列 $i_1 < \cdots < i_p$ 由 $\geqslant 1$ 及 $\leqslant k$ 的 p 个整数组成.]

如果 $p = k$, $\mathscr{A}_k(\mathbb{R}^k;\mathbb{R})$ 中任何元素可写成

$$\boxed{cu_1 \wedge \cdots \wedge u_k} \quad \text{其中} \quad c \in F.$$

系 1.7.3. 对于 $F = \mathbb{R}$, 向量空间 $\mathscr{A}_p(\mathbb{R}^k;\mathbb{R})$ 有由元素

$$u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$$

所形成的基, 这些元素与 $\geqslant 1$ 及 $\leqslant k$ 的整数组成的所有严格增序列 $i_1 < \cdots < i_p$ 相对应. 对于 $p > k$, 这个基是空的; 对于 $p = k$, 它只有一个元素.

习题. 对于 $p < k$, 计算向量空间 $\mathscr{A}_p(\mathbb{R}^k;\mathbb{R})$ 的维数.

2. 微 分 形 式

2.1. 微分形式的定义

在以下叙述中, U 表示巴拿赫空间 E 中一个开集,F 也表示一个巴拿赫空间. 我们注意到 $\mathscr{A}_p(E;F)$ (交错的连续 p 重线性映射 $E^p \to F$ 的空间) 是一个巴拿赫空间, 这是因为它是巴拿赫空间 $\mathscr{L}_p(E;F)$ (参看 1.1 段) 的一个闭子向量空间.

定义. 映射

$$\omega : U \to \mathscr{A}_p(E;F) \tag{2.1.1}$$

叫做在 U 中确定、在 F 中取值的 p 次微分形式. [为了简化, 也可叫做在 U 中确定、在 F 中取值的微分 p 形式.] 如果映射 (2.1.1) 属于 C^n 类, 其中 n 是 $\geqslant 0$ 的整数, 并可能是 ∞, 那么这一微分 p 形式叫做属于 C^n 类.

特殊情形. 零次微分形式就是一个映射 $U \to F$. 1 次微分形式是映射 $U \to \mathscr{L}(E;F)$.

记号. $\Omega_p^{(n)}(U,F)$ 表示在 U 中确定、在 F 中取值的所有 C^n 类微分 p 形式的集. 这集显然是一向量空间.

对于 $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U,F), x \in U$, 并且 $\xi_1, \cdots, \xi_p \in E$, 把 $\omega(x) \in \mathscr{A}_p(E;F)$ 对于向量序列 $\xi_1, \cdots, \xi_p$ 的值记作

$$\omega(x) \cdot (\xi_1, \cdots, \xi_p) \in F.$$

我们也采用记号

$$\omega(x;\xi_1, \cdots, \xi_p)$$

对于固定的 x, 这是 $\xi_1, \cdots, \xi_p$ 的一个交错多重线性映射.

例. 设 $f : U \to F$ 是一个 C^n 类映射, 其中 $n \geqslant 1$. 那么导出映射 $f' : U \to \mathscr{L}(E;F)$ 可看作在 U 中确定、在 F 中取值、且属于 C^{n-1} 类的一次微分形式.

2.2. 微分形式的运算

在第 1 节中, 已经确定了交错多重线性映射的外乘积. 由它可引导出微分形式的外乘积. 现解释如下:

设 F, G, H 是三个巴拿赫空间, 并且设 $\Phi: F \times G \to H$ 是一连续双线性映射. 现设

$$\alpha \in \Omega_p^{(n)}(U, F), \quad \beta \in \Omega_q^{(n)}(U, G)$$

对于每个 $x \in U, \alpha(x)$ 是 $\mathscr{A}_p(E; F)$ 的一个元素, $\beta(x)$ 是 $\mathscr{A}_q(E; G)$ 的一个元素. 它们有外乘积

$$\alpha(x) \wedge_\Phi \beta(x) \in \mathscr{A}_{p+q}(E; H).$$

从 U 到 $\mathscr{A}_{p+q}(E; H)$ 的映射

$$x \mapsto \alpha(x) \wedge_\Phi \beta(x)$$

属于 C^n 类, 这是因为它是 C^n 类映射

$$x \mapsto (\alpha(x), \beta(x))$$

及连续双线性映射

$$\mathscr{A}_p(E; F) \times \mathscr{A}_q(E; G) \to \mathscr{A}_{p+q}(E; H)$$

的复合映射, 而上列双线性映射是由外乘法确定的.

定义. 所谓*微分形式 α 及 β 的外乘积* 就是

$$x \mapsto \alpha(x) \wedge_\Phi \beta(x),$$

记作 $\alpha \wedge_\Phi \beta$. 如果 α 及 β 属于 C^n 类, 它们的外乘积 $\alpha \wedge_\Phi \beta$ 也属于 C^n 类. 因此我们确定了一个双线性映射

$$\Omega_p^{(n)}(U, F) \times \Omega_q^{(n)}(U, G) \to \Omega_{p+q}^{(n)}(U, H).$$

如果用 (1.4.6) 明白表示出这一定义, 我们得到

$$\begin{aligned}&(\alpha \wedge_\Phi \beta)(x; \xi_1, \cdots, \xi_{p+q}) \\ &= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) \Phi(\alpha(x; \xi_{\sigma(1)}, \cdots, \xi_{\sigma(p)}), \beta(x; \xi_{\sigma(p+1)}, \cdots, \xi_{\sigma(p+q)})),\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

和式是对 $\{1, \cdots, p+q\}$ 的满足下列条件的所有排列 σ 作出的:

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p), \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q).$$

例. 设 $f: U \to F$ 是一映射, 并且设 $\omega: U \to \mathscr{A}_n(E; \mathbb{R})$ 是取纯量值的微分 n 形式. 于是取 $G = \mathbb{R}, H = F, \Phi$ 是 F 的向量结构所确定的乘法 $F \times \mathbb{R} \to F$. 把乘积 $f \wedge_\Phi \omega$ 简单记作 $f \cdot \omega$, 它是由下式确定的微分形式:

$$(f \cdot \omega)(x; \xi_1, \cdots, \xi_n) = f(x) \cdot \omega(x; \xi_1, \cdots, \xi_n). \tag{2.2.2}$$

考虑另一例, 即 α 与 β 是取纯量值的两个 1 次微分形式情形. 我们取纯量乘积作为 $\Phi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 于是把 $\alpha\wedge_\Phi\beta$ 简单记作 $\alpha\wedge\beta$, 它是由下式确定的:

$$(\alpha\wedge\beta)(x;\xi_1,\xi_2)=\alpha(x;\xi_1)\beta(x;\xi_2)-\alpha(x;\xi_2)\beta(x;\xi_1). \qquad (2.2.3)$$

微分形式的外乘法承袭了交错多重线性映射的乘法的所有性质:

命题 2.2.1. 取纯量值的微分形式的外乘法

$$(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\wedge\beta$$

是反交换的: 如果 α 有 p 次, β 有 q 次, 那么 $\beta\wedge\alpha=(-1)^{pq}\alpha\wedge\beta$; 这种外乘法是结合的: $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$.

这命题显然可从命题 1.5.1 及 1.5.2 导出.

命题 2.2.2. 设 $\omega_1,\cdots,\omega_p\in\Omega_1^{(n)}(U,\mathbb{R})$ 是取纯量值的 C^n 类微分 1 形式, 那么 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p\in\Omega_p^{(n)}(U,\mathbb{R})$ 是 $\omega_1,\cdots,\omega_p$ 的交错多重线性映射; 我们有

$$\begin{aligned}(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n)(x;\xi_1,\cdots,\xi_n)&=\sum_\sigma\varepsilon(\sigma)\omega_1(x;\xi_{\sigma(1)})\cdots\omega_n(x;\xi_{\sigma(n)})\\&=\det(\omega_i(x;\xi_j)).\end{aligned} \qquad (2.2.4)$$

这命题可从命题 1.6.1 立即推出.

注意. 对于已给整数 n, 考虑向量空间 $\bigoplus\limits_{p\geqslant0}\Omega_p^{(n)}(U,\mathbb{R})$, 即对于所有 p 的值, 向量空间 $\Omega_p^{(n)}(U,\mathbb{R})$ 的直和. 外乘积

$$\Omega_p^{(n)}(U,\mathbb{R})\times\Omega_q^{(n)}(U,\mathbb{R})\to\Omega_{p+q}^{(n)}(U,\mathbb{R})$$

可按线性扩张, 并且从

$$\Omega^{(n)}(U,\mathbb{R})=\bigoplus_{p\geqslant0}\Omega_p^{(n)}(U,\mathbb{R})$$

得一代数. 我们说这是一分度代数, 因为一个 p 次的元素 (即属于 $\Omega_p^{(n)}(U,\mathbb{R})$ 的元素) 与一个 q 次元素的乘积是一个 $p+q$ 次元素. 它是反交换的及结合的.

2.3. 外微分的运算

现引进一种重要的运算, 在交错映射理论中没有类似的运算. 对于每个 $\omega\in\Omega_p^{(n)}(U,F)$ (其中 $n\geqslant1$), 连带着取一个微分 $(p+1)$ 形式, 记作

$$d\omega\in\Omega_{p+1}^{(n-1)}(U,F),$$

并且叫它是 ω 的外微分.

于是设

$$\omega : U \to \mathscr{A}_p(E;F)$$

是一 C^n 类 $(n \geqslant 1)$ 映射. 考虑导出映射; 它属于 C^{n-1} 类:

$$\omega' : U \to \mathscr{L}(E;\mathscr{A}_p(E;F));$$

对于 $x \in U$,

$$(\omega'(x) \cdot \xi_0) \cdot (\xi_1, \cdots, \xi_p) \in F$$

是 $\xi_0, \cdots, \xi_p \in E$ 的连续多重线性映射, 这是 $\xi_1, \cdots, \xi_p$ 的一个交错映射. 换句话说, 用 1.4 段中的记号, $\omega'(x)$ 可看作 $\mathscr{A}_{1,p}(E;F)$ 中的一个元素, 然而在 1.4 段中, 已经确定了一个连续线性映射

$$\varphi_{1,p} : \mathscr{A}_{1,p}(E;F) \to \mathscr{A}_{p+1}(E;F).$$

定义. 外微分 $d\omega$ 是复合映射

$$U \xrightarrow{\omega'} \mathscr{A}_{1,p}(E;F) \xrightarrow{\varphi_{1,p}} \mathscr{A}_{p+1}(E;F).$$

明显表示如下:

$$\boxed{(d\omega)(x;\xi_0,\cdots,\xi_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i(\omega'(x)\cdot\xi_i)\cdot(\xi_0,\cdots,\widehat{\xi_i},\cdots,\xi_p)} \tag{2.3.1}$$

这就是明显表示微分 $(p+1)$ 形式 $d\omega$ 的公式. 如果 ω 属于 C^n 类, 那么 $d\omega$ 属于 C^{n-1} 类.

例.

1°) 取 ω 是映射 $f : U \to F$. 那么

$$(df)(x;\xi) = f'(x)\cdot\xi.$$

在这里, $df : U \to \mathscr{L}(E;F)$ 就是导出映射 f'.

2°) 对于 $p = 1$, 我们有

$$(d\omega)(x;\xi_1,\xi_2) = (\omega'(x)\cdot\xi_1)\cdot\xi_2 - (\omega'(x)\cdot\xi_2)\cdot\xi_1. \tag{2.3.2}$$

由此得:

命题 2.3.1. 设 $\omega \in \Omega_1^{(n)}(U,F), n \geqslant 1$. 要使 $d\omega = 0$, 必须而且只须对于任何 $x \in U$, 双线性映射

$$(\xi_1,\xi_2) \mapsto (\omega'(x)\cdot\xi_1)\cdot\xi_2$$

是对称的.

2.4. 外微分运算的性质

命题 2.4.1. 如果 f 是 C^1 类映射, ω 是 C^1 类微分 p 形式, 我们有

$$d(f\cdot\omega)=(df)\wedge\omega+f\cdot(d\omega). \tag{2.4.1}$$

[这命题特别在两种情形下成立: 1° f 在 F 中取值, ω 取纯量值, $f\cdot\omega$ 在 F 中取值; 2° f 取纯量值, ω 在 F 中取值, 并且 $f\cdot\omega$ 在 F 中取值].

证. 一般地, 设 f 在 F 中取值, ω 在 G 中取值, 并且设 $\Phi: F\times G\to H$ 是连续双线性映射. 那么 $f\cdot\omega$ 是从 U 到 $\mathscr{A}_p(E;H)$ 的映射:

$$x\mapsto\Phi(f(x),\omega(x)).$$

我们知道 (参看上编《微分学》, 第一章, (2.5.5)), x 的这一映射的导出映射在向量 $\xi\in E$ 上取值

$$\Phi(f'(x)\cdot\xi,\omega(x))+\Phi(f(x),\omega'(x)\cdot\xi).$$

为了简化限于 Φ 是 $F\times\mathbb{R}\to F$ 或 $\mathbb{R}\times F\to F$ 情形, 于是可写出

$$(f\cdot\omega)'(x)\cdot\xi=(f'(x)\cdot\xi)\cdot\omega(x)+f(x)\cdot(\omega'(x)\cdot\xi). \tag{2.4.2}$$

应用 (2.3.1), 在其中用 $f\cdot\omega$ 代替 ω:

$$d(f\cdot\omega)\cdot(x;\xi_0,\cdots,\xi_p)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i((f\cdot\omega)'(x)\cdot\xi_i)\cdot(\xi_0,\cdots,\widehat{\xi_i},\cdots,\xi_p);$$

考虑到 (2.4.2), 由上式得

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(f'(x)\cdot\xi_i)\cdot\omega(x)\cdot(\xi_0,\cdots,\widehat{\xi_i},\cdots,\xi_p)$$
$$+\sum_{i=0}^{p}(-1)^i f(x)\cdot(\omega'(x)\cdot\xi_i)(\xi_0,\cdots,\widehat{\xi_i},\cdots,\xi_p).$$

上列第一个和式是外乘积 $(df)\wedge\omega$ 对于 $(\xi_0,\cdots,\xi_p)$ 的值: 第二个和式是乘积 $f\cdot(d\omega)$ 对于 $(\xi_0,\cdots,\xi_p)$ 的值. 这样就证明了 (2.4.1). 证完.

定理 2.4.2. 设 $\alpha\in\Omega_p^{(n)}(U;\mathbb{R})$ 及 $\beta\in\Omega_q^{(n)}(U,\mathbb{R})$ 是两个 C^n 类微分形式 $(n\geqslant 1)$. 我们有

$$d(\alpha\wedge\beta)=(d\alpha)\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge(d\beta). \tag{2.4.3}$$

证. 设有两个映射的双线性映射; 由这一双线性映射的导出映射公式 (上编《微分学》, 第一章, 公式 (2.5.4)). 我们有: 对于 $x\in U$ 及 $\xi\in E$,

$$(\alpha\wedge\beta)'(x)\cdot\xi=(\alpha'(x)\cdot\xi)\wedge\beta(x)+\alpha(x)\wedge(\beta'(x)\cdot\xi).$$

[这是 $\mathscr{A}_{p+q}(E;F)$ 的元素之间的等式.]

为了书写简化, 约定涉及的是有关映射在所考虑的点 x 的值, 我们写出 $\alpha', \beta, \alpha, \beta', (\alpha\wedge\beta)'$ 来代替 $\alpha'(x), \beta(x)$, 等等 $\cdots$ 于是我们有

$$(\alpha\wedge\beta)'\cdot\xi=(\alpha'\cdot\xi)\wedge\beta+\alpha\wedge(\beta'\cdot\xi), \tag{2.4.4}$$

或者还有, 由于外乘法是反交换的:

$$(\alpha\wedge\beta)'\cdot\xi=(\alpha'\cdot\xi)\wedge\beta+(-1)^{pq}(\beta'\cdot\xi)\wedge\alpha. \tag{2.4.5}$$

令

$$\begin{aligned}
u(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{p+q})&=((\alpha'\cdot\xi_0)\wedge\beta)\cdot(\xi_1,\cdots,\xi_{p+q}),\\
v(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{p+q})&=((\beta'\cdot\xi_0)\wedge\alpha)\cdot(\xi_1,\cdots,\xi_{p+q}),\\
w(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{p+q})&=((\alpha\wedge\beta)'\cdot\xi_0)\cdot(\xi_1,\cdots,\xi_{p+q}).
\end{aligned}$$

这些是 (对于固定的 x) $\mathscr{A}_{1,p+q}(E;\mathbb{R})$ 中的元素, 并且 (2.4.5) 可写成

$$w=u+(-1)^{pq}v.$$

现在来求计算交错 $(p+q+1)$ 重线性映射 $d(\alpha\wedge\beta)$; 由定义, 它是通过典范映射

$$\varphi_{1,p+q}:\mathscr{A}_{1,p+q}(E;\mathbb{R})\to\mathscr{A}_{p+q+1}(E;\mathbb{R})$$

作出的 w 的变换, 因此有

$$d(\alpha\wedge\beta)=\varphi_{1,p+q}(u)+(-1)^{pq}\varphi_{1,p+q}(v). \tag{2.4.6}$$

然而 u 是一外乘积; 因此把

$$((\alpha'\cdot\xi_0)\cdot(\xi_1,\cdots,\xi_p))\cdot\beta(\xi_{p+1},\cdots,\xi_{p+q})$$

看作 $\mathscr{A}_{p,q}(E;\mathbb{R})$ 中的元素 [对于固定的 ξ_0], 对它应用映射

$$\varphi_{p,q}:\mathscr{A}_{p,q}(E;\mathbb{R})\to\mathscr{A}_{p+q}(E;\mathbb{R}),$$

我们就得到 u. 最后, 考虑 $\mathscr{A}_{1,p,q}(E;\mathbb{R})$ 中由下式确定的元素:

$$(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{p+q})\mapsto((\alpha'\cdot\xi_0)\cdot(\xi_1,\cdots,\xi_p))\cdot\beta(\xi_{p+1},\cdots,\xi_{p+q}); \tag{2.4.7}$$

$\varphi_{1,p+q}(u)$ 是这元素通过 $\varphi_{1,p+q}\circ\varphi_{p,q}$ 所作出的变换. 然而由引理 1.5.3, 我们有

$$\varphi_{1,p+q}\circ\varphi_{p,q}=\varphi_{1+p,q}\circ\varphi_{1,p}.$$

如果对多重线性形式 (2.4.7) 应用 $\varphi_{1,p}$, 求得

$$(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{p+q}) \mapsto ((d\alpha) \cdot (\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_p)) \cdot \beta(\xi_{p+1}, \cdots, \xi_{p+q}).$$

并且如果接着应用 $\varphi_{1+p,q}$, 就求得外乘积 $d\alpha \wedge \beta$ 在向量系 $(\xi_0, \cdots, \xi_{p+q})$ 上的值因此最后得

$$\varphi_{1,p+q}(u) = (d\alpha) \wedge \beta.$$

根据同样的理由, 我们有

$$\varphi_{1,p+q}(v) = (d\beta) \wedge \alpha.$$

于是由关系式 (2.4.6) 得

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{pq} (d\beta) \wedge \alpha.$$

然而外乘法是反交换的, 因此

$$(d\beta) \wedge \alpha = (-1)^{p(q+1)} \alpha \wedge (d\beta),$$

并且最后得到

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta);$$

这就是关系式 (2.4.3), 也就是要证明的.

2.5. 外微分的基本性质

定理 2.5.1. 设 $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U, F)$ 是 C^n 类的微分形式, 其中 $n \geqslant 2$. 那么

$$\boxed{d(d\omega) = 0}.$$

(运算 d, 如果连作两次, 就得到零.)

证. 对于已给数值 $x \in U$ (此后在记号中看作是如此的), $d\omega$ 是 $\xi_1, \cdots, \xi_{p+1}$ 的交错多重线性映射; 它是把 $\varphi_{1,p} : \mathscr{A}_{1,p}(E; F) \to \mathscr{A}_{p+1}(E; F)$ 作用到下列多重线性映射得到的:

$$(\xi_1, \cdots, \xi_{p+1}) \mapsto \omega'(\xi_1) \cdot (\xi_2, \cdots, \xi_{p+1}).$$

因此对于固定的 $\xi_0, (d\omega)' \cdot \xi_0$ 是 $\xi_1, \cdots, \xi_{p+1}$ 的交错多重线性映射; 这映射是把 $\varphi_{1,p}$ 作用于下列多重线性映射而得:

$$(\xi_1, \cdots, \xi_{p+1}) \mapsto ((\omega'' \cdot \xi_0) \cdot \xi_1) \cdot (\xi_2, \cdots, \xi_{p+1});$$

把 ω'' 看作在 $\mathscr{A}_p(E; F)$ 中取值的双线性映射, 上一行右边也可写成

$$\omega''(\xi_0, \xi_1) \cdot (\xi_2, \cdots, \xi_{p+1}) \tag{2.5.1}$$

把 (2.5.1) 看作 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{p+1}$ 的多重线性映射; 这是 $\mathscr{A}_{1,1,p}(E;F)$ 中的一个元素. 把 (2.5.1) 看作 (对于固定的 ξ_0)$\xi_1, \cdots, \xi_{p+1}$ 的映射, 于是把算子 $\varphi_{1,p}$ 作用于它, 就得到 $\mathscr{A}_{1,p+1}(E;F)$ 中的一元素; 它就是 $(d\omega)'$, 可看作 $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{p+1}$ 的多重线性映射. 然后把 $\varphi_{1,p+1}$ 作用于 $(dw)'$, 也就是把 $\varphi_{1,p+1} \circ \varphi_{1,p}$ 作用于多重线性映射 (2.5.1), 我们得到交错 $(p+2)$ 线性映射 $d(d\omega)$.

由引理 1.5.3, 我们有

$$\varphi_{1,p+1} \circ \varphi_{1,p} = \varphi_{2,p} \circ \varphi_{1,1}.$$

而把 $\varphi_{1,1}$ 作用于多重线性映射 (2.5.1), 就得到

$$\omega''(\xi_0, \xi_1) \cdot (\xi_2, \cdots, \xi_{p+1}) - \omega''(\xi_1, \xi_0)(\xi_2, \cdots, \xi_{p+1});$$

由于二阶导出映射 ω'' 是 ξ_0 及 ξ_1 的对称线性映射 (上编《微分学》, 第一章, 定理 5.1.1), 上列式子等于零, 因此我们正好有 $d(d\omega) = 0$. 证完.

2.6. 有限维空间上的微分形式

假定 E 有有限维 k. 选取 E 的一个基, 使 E 与 $\mathbb{R}^k$ 等同. 设 $u_i \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R})$ 是第 i 个坐标映射, 看作一个线性形式. 给出一个开集 $U \subset \mathbb{R}^k$, 把 u_i 在 U 中的限制记作 x_i, 这次把它看作可微映射 $x_i : U \to \mathbb{R}$.

引理 2.6.1. 映射 x_i 的微分 dx_i 是常数映射 $U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R})$, 它的值是元素 $u_i \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R})$.

事实上, 映射 x_i 是线性的; 由第一章的命题 2.4.2 (上编《微分学》), 我们知道导出映射是常量, 并且这常量的值是 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R})$ 中的元素, 恰好等于所考虑的线性映射.

定理 2.6.2. 如果 U 是 $\mathbb{R}^k$ 中的开集, 任何微分形式 $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U, F)$ 可唯一地写成

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} c_{i_1, \cdots, i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}. \tag{2.6.1}$$

其中 "系数" $c_{i_1, \cdots, i_p}$ 是 C^n 类的映射: $U \to F$. 在和式中, 整数 $i_1 < \cdots < i_p$, 并且这些整数 $\geqslant 1, \leqslant k$.

证. 参照定理 1.7.1; 这定理给出了 $\mathscr{A}_p(\mathbb{R}^k; F)$ 中元素的一种典范形式. 在这里, 由定义, ω 是 C^n 类的映射:

$$\omega : U \to \mathscr{A}_p(\mathbb{R}^k; F).$$

对于 $x \in U, \omega(x) \in \mathscr{A}_p(\mathbb{R}^k; F)$ 可唯一地写成

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_p} c_{i_1, \cdots, i_p} u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p};$$

然而对于 $x \in U, u_{i_1}, \cdots, u_{i_p}$ 是常量映射 $dx_{i_1}, \cdots, dx_{i_p}$ 的值 (上一引理); 至于 "系数" $c_{i_1,\cdots,i_p}$, 它与 x 有关. 显然映射

$$x \mapsto \sum_{i_1<\cdots<i_p} c_{i_1,\cdots,i_p}(x) u_{i_1} \wedge \cdots \wedge u_{i_p}$$

属于 C^n 类必须而且只须 $c_{i_1,\cdots,i_p}$ 是一些属于 C^n 类的映射. 考虑到 (2.6.1) 式右边的微分形式外乘积的定义, 定理 2.6.2 得证.

此后, (2.6.1) 式的右边叫做微分形式 ω (在开集 $U \subset \mathbb{R}^k$ 中) 的典范写法.

定理 2.6.2 特别对于 $F = \mathbb{R}$ (取纯量值的微分形式) 成立: 在这种情形下, 系数 $c_{i_1,\cdots,i_p}$ 是数值函数, 我们可以说 $\Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R})$ 是 C^n 类数值函数环 $\Omega_0^{(n)}(U, \mathbb{R})$ 上的模; 这个环的模以下列元素的集为基, 即以整数增序列 $(1 \leqslant) i_1 < \cdots < i_p (\leqslant k)$ 相对应元素的集为基:

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \in \Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R}).$$

特殊情形: $p = 1$. 在这种情形下, 任何微分 1 形式 $\omega \in \Omega_1^{(n)}(U, F)$ 可唯一地写成

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} c_i(x) dx_i, \tag{2.6.2}$$

其中 c_i 是一些 C^n 类的映射: $U \to F$. 我们看到了一次微分形式的通常写法.

重要的是对于一点 $x \in U$ 及一个向量 $\xi \in \mathbb{R}^n$, 会计算 (2.6.2) 确定的形式 ω 的值 $\omega(x; \xi)$. 为此, 必须想到: 由引理 2. 6. 1, 对于 $(x; \xi), dx_i$ 的值与 x_i 无关, 并且等于 $u_i(\xi)$, 即第 i 个坐标形式 u_i 在向量 ξ 上的值. 于是

$$\omega(x; \xi) = \sum_{i=1}^{k} c_i(x) \xi_i \tag{2.6.3}$$

这里 ξ_i 表示向量 $\xi \in \mathbb{R}^k$ 的第 k 个坐标.

命题 2.6.3. 设 U 是 $\mathbb{R}^k$ 中的开集. 如果 $f: U \to F$ 属于 C^1 类, 它的微分 df 有典范写法

$$\boxed{df = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i}. \tag{2.6.4}$$

事实上, $df: U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^k; F)$ 就是导出映射 f'; 而且我们在上编《微分学》第一章的公式 (2.6.1) 中已经看到: 如果 ξ 是坐标为 $\xi_1, \cdots, \xi_k$ 的向量, 我们有

$$f'(x) \cdot \xi = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \xi_i.$$

于是

$$(df)(x; \xi) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \xi_i,$$

并且由 (2.6.3), 上式正好表达了关系式 (2.6.4).

2.7. 按典范写出的微分形式的算法

在本段中, 假定 U 是 $\mathbb{R}^k$ 中的开集, 并且采用微分形式的典范写法 (定理 2.6.2). 设 α 是一 p 形式, β 是一 q 形式; 已知 α 及 β 的典范写法, 我们要找到 $\alpha \wedge \beta$ 的典范写法.

由于外乘法对于加法是分配的, 只须对 α 及 β 都缩成一项情形进行计算:

$$\alpha = a(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p},$$
$$\beta = b(x)dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}.$$

我们要求关于连续双线性映射

$$\Phi : F \times G \to H$$

的乘积 $\alpha \wedge \beta$ (F 表示 α、即映射 $a(x)$ 的值的空间, G 表示 β、即映射 $b(x)$ 的值的空间). 应用乘法的结合性及反交换性, 求得

$$\alpha \wedge_{\Phi} \beta = \Phi(a(x), b(x))dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q};$$

在这里, $\Phi(a, b)$ 是映射 a 及 b 关于 Φ 的 "乘积" [例如, 如果 a 及 b 是数值函数, 并且如果 $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是纯量的乘积, 那么 $\Phi(a, b)$ 简单地就是函数 a 及 b 的乘积]. 余下只须求得下列乘积的典范写法:

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}.$$

现分两种情形讨论: 1) 如果整数 $i_1, \cdots, i_p, j_1, \cdots, j_q$ 不是全部不相同, 这乘积是零; 2) 如果这些整数全部不相同, 那么一个排列 σ 就可把它们排成严格增加的次序, 设为

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_{p+q};$$

并且我们有

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q} = \varepsilon(\sigma)dx_{k_1} \wedge \cdots \wedge dx_{k_{p+q}}.$$

于是就可得到 $\alpha \wedge_{\Phi} \beta$ 的典范写法.

我们刚才解释了怎样计算典范写法的外乘积, 已给典范写法的微分形式 ω, 现在来看怎样计算 ω 的外微分 $d\omega$. 只须会对 ω 缩成一项

$$\omega = c(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \tag{2.7.1}$$

情形进行计算, 这里 "系数" c 是 C^1 类映射 $U \to F$. 我们要应用 2.4 段中给出 $d(\alpha \wedge \beta)$ 的结果; 由递推, 如果 ω 是 p_i 次微分形式 ω_i 的外乘积

$$\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n,$$

我们有

$$d\omega = d\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_n + (-1)^{p_1}\omega_1 \wedge (d\omega_2) \wedge \cdots \wedge \omega_n$$
$$+ \cdots + (-1)^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}}\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{n-1} \wedge (d\omega_n). \quad (2.7.2)$$

把上式应用到 (2.7.1) 所确定的形式 ω :

$$d\omega = dc \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} + cd(dx_{i_1}) \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$
$$+ \cdots \pm c dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \wedge d(dx_{i_p}).$$

然而由 2.5 段, 我们有

$$d(dx_{i_1}) = 0, \cdots, d(dx_{i_p}) = 0.$$

因此简单地只剩下

$$\boxed{d\omega = dc \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}}. \quad (2.7.3)$$

这是很简单的公式, 记住它是容易的 (并且是重要的!).

(2.7.3) 还没有给出 $d\omega$ 的典范写法 (对于 (2.7.1) 所确定的 ω). 但是这种写法容易得到. 事实上, 在 (2.7.3) 的右边, 把 dc 用它的值

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial c}{\partial x_j} dx_j \quad (\text{参看命题 2.6.3})$$

来代替, 然后展开:

$$d\omega = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial c}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

还只须找出 $dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ 的典范写法; 如我们在上面已经解释过: 如果 j 等于 $i_1, \cdots, i_p$ 之中的一个整数, 上列外乘积等于零; 如果 σ 是把序列 $(j, i_1, \cdots, i_p)$ 变换成严格增序列 $(k_1, \cdots, k_{p+1})$ 的一个排列, 那么上列外乘积等于 $\varepsilon(\sigma) dx_{k_1} \wedge \cdots \wedge dx_{k_{p+1}}$.

例. 在有坐标 x, y, z 的 $\mathbb{R}^3$ 中, 考虑

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

其中系数 P, Q, R 是变量 x, y, z 的 C^1 类函数. 直接计算就得到

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz$$

的典范写法, 即

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

习题. 建议对任何 C^2 类微分形式, 用典范写法, 证明 $d(d\omega) = 0$ (参看定理 2.5.1). 开始证明对于一个 C^2 类函数 $f, d(df) = 0$; 我们有 (命题 2.6.3):

$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j,$$

由此得

$$d(df) = \sum_j d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j.$$

然而

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i,$$

由此得

$$d(df) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j;$$

在求和中, 指标 i 及 j 独立变化, 对于 $i = j$, 相应的项是零, 这是因为 $dx_i \wedge dx_i = 0$. 对于 $i \neq j$, 把与 (i, j) 相应的项及与 (j, i) 相应的项集中在一起; 求得

$$d(df) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i\right).$$

然而 (施瓦茨定理, 上编《微分学》, 第 1 章, 命题 5.2.2) 我们有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

并且另一方面 $dx_i \wedge dx_j = -dx_j dx_i$. 因此正好得到

$$d(df) = 0.$$

现在为了证明 $d(d\omega) = 0$, 只须考虑 ω 化为一项情形:

$$\omega = c dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

那么

$$d\omega = (dc) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

由公式 (2.7.2) (其中应把 ω 换成 $d\omega$), $d(d\omega)$ 是一些项的和, 其中每项有一因子, 或者是 $d(dc)$, 或者是 $d(dx_{j_1}), \cdots$, 或者是 $d(dx_{j_p})$. 然而由前面讲过的所有这些因子都是零. 因此 $d(d\omega) = 0$. 这样, 刚用典范写法给出了 (对于 $\mathbb{R}^k$ 中开集适用) 定理 2.5.1 的一个新证明: $d(d\omega) = 0$.

2.8. 微分形式中的变量代换

我们回到 U 是巴拿赫空间 E 中开集的一般情形. 设

$$\omega : U \to \mathscr{A}_p(E;F)$$

是 C^n 类的一个微分 p 形式 $(n \geqslant 0)$. 另一方面, 设已给一映射

$$\varphi : U' \to U,$$

其中 U' 是一巴拿赫空间 E' 中的开集; 假定 φ 属于 C^{n+1} 类. 我们要确定 C^n 类的一个 p 形式:

$$U' \to \mathscr{A}_p(E';F),$$

记作 $\varphi^*(\omega)$, 或简记作 $\varphi^*\omega$, 并且把它叫做从 ω 通过变量代换

$$\varphi : U' \to U$$

所推出的微分形式.

在明确给出形式 $\varphi^*\omega$ 的定义之前, 我们想要使得对于一点 $y \in U'$ 及对于向量 $\eta_1, \cdots \eta_p \in E', \varphi^*\omega$ 的值由下列公式给出:

$$(\varphi^*\omega)(y;\eta_1,\cdots,\eta_p) = \omega(\varphi(y);\varphi'(y)\cdot\eta_1,\cdots,\varphi'(y)\cdot\eta_p) \tag{2.8.1}$$

[我们记得 $\varphi'(y)$ 是 $\mathscr{L}(E';E)$ 中的元素.]. 还要使 (2.8.1) 正好确定 $\varphi^*\omega$ 作为从 U' 到 $A_p(E';F)$ 的一个 C^n 类映射.

我们从 $p=0$ 情形开始: 于是 ω 简单地是 C^n 类映射 $f: U \to F$; (2.8.1) 可写成

$$(\varphi^* f)(y) = f(\varphi(y)),$$

换句话说,由定义, $\varphi^* f : U' \to F$ 是复合映射$f \circ \varphi$. 在这种情形 $(p=0)$ 下, 只须假定 φ 属于 C^n 类, 就可断定 $f \circ \varphi$ 属于 C^n 类 (参看上编《微分学》, 第一章, 定理 (5.4.2). 于是映射

$$f \mapsto f \circ \varphi = \varphi^*(f)$$

是一线性映射 $\Omega_0^{(n)}(U,F) \to \Omega_0^{(n)}(U',F)$.

现在研究 $p>0$ 情形; 这次将必须假定 φ 属于 C^{n+1} 类. 公式 (2.8.1) 表明: 把 $\varphi^*\omega$ 看作映射 $U' \to \mathscr{A}_p(E';F), \varphi^*\omega$ 是下列两个映射的复合映射:

1) 映射 $U' \to \mathscr{A}_p(E;F) \times \mathscr{L}(E';E)$, 其中第一个合成子是 $\omega\circ\varphi : U' \to \mathscr{A}_p(E;F)$, 第二个合成子是 $\varphi' : U' \to \mathscr{L}(E';E)$;

2) 映射 $\lambda_p : \mathscr{A}_p(E;F) \times \mathscr{L}(E';E) \to \mathscr{A}_p(E';F)$, 这映射对一个 $f \in \mathscr{A}_p(E;F)$ 及一个 $g \in \mathscr{L}(E';E)$ 连带着 $\mathscr{A}_p(E';F)$ 中由下式确定的元素:

$$(\eta_1,\cdots,\eta_p) \mapsto f(g(\eta_1),\cdots,g(\eta_p)).$$

容易看出, 映射 λ_p 属于 C^∞ 类 (它甚至是一多项式映射, 因为它对 f 是线性的, 对 g 是 p 次齐次多项式). 既然已假定 ω 属于 C^n 类, 并且 φ 属于 C^{n+1}类, 映射 $\omega\circ\varphi$ 及 φ' 属于 C^n 类; 因此映射 1) 属于 C^n 类. 从而 1) 及 2) 的复合映射 $\varphi^*\omega$ 属于 C^n 类.

我们证明了:

命题 2.8.1. 如果 φ 属于 C^{n+1} 类, "变量代换" 公式 (2.8.1) 使任何微分形式 $\omega\in\Omega_p^{(n)}(U,F)$ 与一个微分形式 $\varphi^*\omega\in\Omega_p^{(n)}(U',F)$ 相连带. 因此 φ^* 是一线性映射

$$\varphi^*=\Omega_p^{(n)}(U,F)\to\Omega_p^{(n)}(U',F).$$

(对于 $p=0$, 只须假定 φ 属于 C^n 类.)

2.9. 变量代换中映射 φ^* 的性质

定理 2.9.1. φ^* 不妨碍外乘法: 如果 $\alpha\in\Omega_p^{(n)}(U,F)$ 并且 $\beta\in\Omega_q^{(n)}(U,G)$, 又如果给出一个连续双线性映射 $\Phi:F\times G\to H$, 我们有

$$\varphi^*(\alpha\wedge_\Phi\beta)=(\varphi^*\alpha)\wedge_\Phi(\varphi^*\beta). \tag{2.9.1}$$

证. 原则上, 这可由计算简单验证; 显然要用到外乘法的定义. 作计算时, 为了简化, 写出 φ' 来代替 $\varphi'(y)$; 我们有

$$\begin{aligned}&(\varphi^*\alpha\wedge_\Phi\varphi^*\beta)(y;\eta_1,\cdots,\eta_{p+q})\\&=\sum_\sigma\varepsilon(\sigma)\Phi((\varphi^*\alpha)(y;\eta_{\sigma(1)},\cdots,\eta_{\sigma(p)}),(\varphi^*\beta)(y;\eta_{\sigma(p+1)},\cdots,\eta_{\sigma(p+q)}))\end{aligned} \tag{2.9.2}$$

和式是对 $\{1,\cdots,p+q\}$的所有满足 (1.4.3) 的排列 σ 作出的. 这和式等于

$$\sum_\sigma\varepsilon(\sigma)\Phi(\alpha(\varphi(y);\varphi'\cdot\eta_{\sigma(1)},\cdots,\varphi'\cdot\eta_{\sigma(p)}),\beta(\varphi(y);\varphi'\cdot\eta_{\sigma(p+1)},\cdots,\varphi'\cdot\eta_{\sigma(p+q)})).$$

上式明显地等于 $(\varphi^*\omega)(y;\eta_1,\cdots,\eta_{p+q})$, 这里 ω 表示由下式确定的微分形式 $U\to\mathscr{A}_{p+q}(E;F)$:

$$\omega(x;\xi_1,\cdots,\xi_{p+q})=\sum_\sigma\varepsilon(\sigma)\Phi(\alpha(x;\xi_{\sigma(1)},\cdots,\xi_{\sigma(p)}),\beta(x;\xi_{\sigma(p+1)},\cdots,\xi_{\sigma(p+q)})).$$

我们看到

$$\omega=\alpha\wedge_\Phi\beta;$$

因此 (2.9.2) 的左边等于 $\varphi^*(\alpha\wedge_\Phi\beta)$ 在点 y、对于向量 $\eta_1,\cdots,\eta_{p+q}\in E'$ 的值. 于是等式 (2.9.1) 得证.

定理 2.9.2. 如果 $\varphi:U'\to U$ 及 $f:U\to F$ 属于 C^1 类, 我们有

$$\varphi^*(df)=d(\varphi^*f) \tag{2.9.3}$$

[注意: $\varphi^* f: U' \to F$ 属于 C^1 类]. 如果 $\varphi: U' \to U$ 属于 C^2 类; 并且

$$\omega: U \to \mathscr{A}_p(E; F)$$

属于 C^1 类, 我们有

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega) \tag{2.9.4}$$

[注意: $\varphi^*\omega$ 及 $d\omega$ 属于 C^1 类].

简单地说, φ^* 与外微分运算是相容的.

(2.9.3) 的证. 我们有

$$(df)(x; \xi) = f'(x) \cdot \xi, \tag{2.9.5}$$

因此

$$(\varphi^*(df))(y; \eta) = f'(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y) \cdot \eta = (f'(\varphi(y)) \circ \varphi'(y)) \cdot \eta.$$

然而 (复合映射的导出映射):

$$f'(\varphi(y)) \circ \varphi'(y) = (f \circ \varphi)'(y) = (\varphi^* f)'(y),$$

因此 (2.9.5) 的两边等于

$$(\varphi^* f)'(y) \cdot \eta = (d(\varphi^* f))(y; \eta),$$

这正好证明了 (2.9.3).

(2.9.4) 的证明略为复杂一点, 但还是可用计算简单验证. 我们把这留下来作为习题; 特别在 $E = \mathbb{R}^k$ 情形, 下面要用微分形式的典范写法作出证明.

2.10. 按典范写出的 φ^* 的计算

设 U 是 $\mathbb{R}^k$ 中开集. 我们知道任何 $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U, F)$ 是下列形状的微分形式的和:

$$c(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}.$$

在 $\omega = c(x) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ 情形, 计算 $\varphi^*\omega$. 由定理 2.9.1 (φ^* 与乘积的相容性) 以及关系式 (2.9.3), 我们有

$$\varphi^*\omega = \varphi^*(c) d(\varphi^* x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(\varphi^* x_{i_p}).$$

既然 $\varphi^* x_i = x_i \circ \varphi: U' \to \mathbb{R}$ 是表示 $\varphi(y)$ 的第 i 个坐标的映射 φ_i, 这里 $\varphi(y)$ 是 $y \in U$ 的映射. 于是我们有

$$\varphi^*\omega = c(\varphi(y))(d\varphi_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (d\varphi_{i_p}) \tag{2.10.1}$$

为了得到 $\varphi^*\omega$ 的典范写法, 只须写出

$$d\varphi_i = \sum_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} dy_j,$$

代入 (2.10.1) 的左边, 并且像 2.7 段中所已解释过那样展开.

实用法则. 写出变换 φ, 把 $\varphi(y)$ 的坐标 $x_1, \cdots, x_k$ 表示为 y 的坐标 $y_1, \cdots, y_h$ 的映射 (假定 U' 是 $\mathbb{R}^h$ 中的开集):

$$x_i = \varphi_i(y_1, \cdots, y_h);$$

然后在 $c(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ 中, 用 $\varphi(y)$ 代替 x, 用 $d\varphi_{i_1}$ 等等代替 dx_{i_1}; 把微分 $d\varphi_{i_1}, \cdots$ 展开成 $dy_1, \cdots, dy_h$ 的线性组合, 再进行计算.

现在要证明 (2.9.4) 成立, 当

$$\omega = c(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

时作证明, 我们有

$$\begin{aligned}
\varphi^*(d\omega) &= \varphi^*(dc \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) \\
&= d(c \circ \varphi) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_p} \\
&= d((c \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_p}) \\
&= d(\varphi^*\omega).
\end{aligned}$$

证完.

习题: 假定 $k = h = p$. 在 $U \subset \mathbb{R}^p$ 中的 p 次微分形式 ω 可写成

$$\omega = c(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p$$

(只含一项). 映射 $\varphi : U' \to U$ 由含 p 个变量的 p 个函数

$$x_i = \varphi_i(y_1, \cdots, y_p)$$

确定. 证明

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p = J dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_p,$$

其中 J 是变换 φ 的雅可比行列式:

$$J = \det\left(\left\{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right\}\right),$$

有时也记作

$$\frac{\partial(x_1, \cdots, x_p)}{\partial(y_1, \cdots, y_p)}.$$

因此我们有

$$\boxed{\varphi^*\omega = c(\varphi(y)) \frac{\partial(x_1, \cdots, x_p)}{\partial(y_1, \cdots, y_p)} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_p}. \tag{2.10.2}$$

2.11. 变量代换的可递性

设 E, E' 及 E'' 是巴拿赫空间; U, U' 及 U'' 分别是 E, E' 及 E'' 中的开集, 设

$$\varphi : U' \to U, \psi : U'' \to U'$$

是 C^{n+1}类映射, 我们知道 $\varphi \circ \psi : U'' \to U$ 属于 C^{n+1}类, 变量代换确定线性映射

$$\varphi^* : \Omega_p^{(n)}(U, F) \to \Omega_p^{(n)}(U', F)$$
$$\psi^* : \Omega_p^{(n)}(U', F) \to \Omega_p^{(n)}(U'', F).$$

命题 2.11.1. 映射

$$(\varphi \circ \psi)^* : \Omega_p^{(n)}(U, F) \to \Omega_p^{(n)}(U'', F)$$

等于 φ^* 及 ψ^* 的复合映射:

$$\boxed{(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*}. \tag{2.11.1}$$

(注意: 字母 φ 及 ψ 在上列等式两边出现的次序不同.)

证. 从 $p = 0$ 情形开始; 那么只须假定 φ 及 ψ 属于 C^n 类, 并且关系式 (2.11.1) 表明: 对于任何 C^n 类的 $f : U \to F$, 我们有

$$f \circ (\varphi \circ \psi) = (f \circ \varphi) \circ \psi,$$

这是明显的, 在一般情形, 设 $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U, F)$; 对于 $y \in U', \eta_1, \cdots, \eta_p \in E'$, 我们有

$$(\varphi^* \omega)(y; \eta_1, \cdots, \eta_p) = \omega(\varphi(y); \varphi'(y) \cdot \eta_1, \cdots, \varphi'(y) \cdot \eta_p)$$

因此, 对于 $z \in U'', \xi_1, \cdots, \xi_p \in E''$, 我们有

$$(\psi^*(\varphi^* \omega))(z; \xi_1, \cdots, \xi_p) = \omega(\varphi(\psi(z)); \varphi'(\psi(z)) \cdot \psi'(z) \cdot \xi_1, \cdots). \tag{2.11.2}$$

然而由给出复合映射的导出映射的定理,

$$\varphi'(\psi(z)) \cdot \psi'(z) = (\varphi \circ \psi)'(z).$$

因此 (2.11.2) 的右边等于

$$\omega((\varphi \circ \psi)(z); (\varphi \circ \psi)'(z) \cdot \xi_1, \cdots, (\varphi \circ \psi)'(z) \cdot \xi_p),$$

这就证明了 (2.11.1).

2.12. 微分形式等于 $d\alpha$ 的条件

本段问题如下: 设已给微分形式

$$\omega : U \to \mathscr{A}_p(E; F), \quad 其中\ p \geqslant 1.$$

在什么条件下, 存在着微分形式 $\alpha : U \to \mathscr{A}_{p-1}(E; F)$, 使得 $d\alpha = \omega$?

如果我们要求 α 属于 C^2 类, ω 必须 属于 C^1 类, 并且 $d\omega = 0$, 因为 $d(d\alpha) = 0$. 当开集 U 满足某些条件 (见下) 时, 我们要给出一个部分的逆定理.

定义. 已给向量空间 E 中一个子集 U 及 U 中一点 a, 如果任给 $x \in U$, 点 $(1-t)a + tx$ (其中 $0 \leqslant t \leqslant 1$) 所形成的线段 $[a, x]$ 包含在 U 内, 那么 U 叫做关于 a 的星形域. 显然, 星形域是连通域, 并且凸域是星形域.

定理 2.12.1 (庞加莱定理). *设 E 及 F 是两个巴拿赫空间, 设 U 是 E 中一个开集, 并且是关于 U 中一点的星形域, 如果*

$$\omega \in \Omega_p^{(n)}(U, F) \quad (n \geqslant 1, p \geqslant 1)$$

满足 $d\omega = 0$, 那么存在着 $\alpha \in \Omega_{p-1}^{(n)}(U, F)$, 使得 $d\alpha = \omega$.

这定理的证明在下段中作出. 我们记得, 在 $p = 0$ 情形下已经知道: 如果映射 $f \in \Omega_0^1(U, F)$ 满足 $df = 0$, 并且如果 U 至少是连通域 (特别如果 U 是星形域), 那么 f 在 U 中是常量.

我们要用到与微分形式理论无关的一个引理:

引理 2.12.2 (积分号下微分法).

设 E 及 F 是两个巴拿赫空间, I 是线段 $[0, 1]$, U 是 E 中一个开集, 并且设

$$\varphi : U \times I \to F$$

是一连续映射. 对于 $x \in U$, 令

$$\psi(x) = \int_0^1 \varphi(x, t) dt.$$

那么 $\psi : U \to F$ 是连续的. 如果偏导出映射 φ'_x 在每点 $(x, t) \in U \times I$ 还存在, 并且是一连续映射 $U \times I \to \mathscr{L}(E; F)$, 那么 ψ 属于 C^1 类, 并且

$$\psi'(x) = \int_0^1 \varphi_x^1(x, t) dt. \tag{2.12.1}$$

证. 设已给 $\varepsilon > 0$, 对于每一点 $(x, t) \in U \times I$, 存在着一个 $\eta(x, t)$, 使得对于 $\|x' - x\| \leqslant \eta(x, t), |t' - t| \leqslant \eta(x, t)$, 我们有

$$\|\varphi(x', t') - \varphi(x, t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此特别对于 $|t'-t|\leqslant \eta(x,t)$,

$$\|\varphi(x,t')-\varphi(x,t)\|\leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

比较上列两不等式, 就得到: 对于 $\|x'-x\|\leqslant \eta(x,t), |t'-t|\leqslant \eta(x,t)$,

$$\|\varphi(x',t')-\varphi(x,t')\|\leqslant \varepsilon.$$

对每个 $t\in I$, 连带着满足下列条件的 $t'\in I$

$$|t'-t|<\eta(x,t)$$

所形成的开区间 (x 固定). 由于 I 是紧集, 可以用有限个这样的开区间覆盖它. 设有有限个点 $t_i(t_i\in I)$ 与有限个开区间相连带. 设 $\eta(x)$ 是 $\eta(x,t_i)$ 中最小的. 对于任何 $t'\in I$, 存在着一个 t_i, 使得 $|t'-t_i|<\eta(x,t_i)$; 因此我们有: 对于 $\|x'-x\|\leqslant \eta(x)$, 对于任何 $t'\in I$,

$$\|\varphi(x',t')-\varphi(x,t')\|\leqslant \varepsilon. \tag{2.12.2}$$

换句话说, 在点 x, φ 对 t 一致连续. 于是

$$\psi(x')-\psi(x)=\int_0^1 (\varphi(x',t)-\varphi(x,t))dt;$$

从而

$$\|\psi(x')-\psi(x)\|\leqslant \int_0^1 \|\varphi(x',t)-\varphi(x,t)\|dt,$$

因为我们知道一个函数的积分的范数不超过这函数的范数的积分. 那么 (2.11.2) 表明我们有: 对于 $\|x'-x\|\leqslant \eta(x)$,

$$\|\psi(x')-\psi(x)\|\leqslant \int_0^1 \varepsilon dt=\varepsilon.$$

这就证明了 $\psi: U\to F$ 是一连续映射.

现假定 φ'_x 存在, 并且是一连续映射 $U\times I\to \mathscr{L}(E;F)$. 由刚才所证明的, 映射

$$\lambda(x)=\int_0^1 \varphi'_x(x,t)dt$$

是连续的. 余下只要证明 ψ 可微, 并且 $\psi'(x)=\lambda(x)$. 为此, 必须证明, 对于固定的 $x\in U$,

$$\|\psi(x+h)-\psi(x)-\lambda(x)\cdot h\|=o(\|h\|). \tag{2.12.3}$$

然而由 φ'_x 的连续性, 对每个 $\varepsilon>0$, 可连带着取一个 $\eta>0$ (与 x 有关), 使得对任何 $t\in I$, 只要 $\|h\|\leqslant \eta$, 就有

$$\|\varphi'_x(x+h,t)-\varphi'_x(x,t)\|\leqslant \varepsilon;$$

事实上, 我们对 φ'_x 应用 (2.12.2) 中已对 φ 证明了的结果. 由有限增量不等式可断定: 对于 $\|h\| \leqslant \eta$,

$$\|\varphi(x+h,t) - \varphi(x,t) - \varphi'_x(x,t)\cdot h\| \leqslant \varepsilon\|h\|.$$

于是我们有: 对于 $\|h\| \leqslant \eta$,

$$\begin{aligned}\|\psi(x+h) - \psi(x) - \lambda(x)\cdot h\| &= \|\int_0^1 (\varphi(x+h,t) - \varphi(x,t) - \varphi'_x(x,t)\cdot h)dt\| \\ &\leqslant \int_0^1 \|\varphi(x+h,t) - \varphi(x,t) - \varphi'_x(x,t)\cdot h\|dt \\ &\leqslant \int_0^1 \varepsilon\|h\|dt = \varepsilon\|h\|.\end{aligned}$$

这就证明了 (2.12.3), 并且引理完全得证.

系 2.12.3. 在上引理的假设下, 如果 n 阶导出映射 $\partial^n\varphi/\partial x^n$ 存在, 并且是一连续映射 $U\times I \to \mathscr{L}_n(E;F)$, 那么 ψ 属于 C^n 类, 并且我们有

$$\psi^n(x) = \int_0^1 \frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}(x,t)dt.$$

(对 n 递推, 证明是明显的.)

2.13. 庞加莱定理的证明

假定 U 是关于原点的星形域; 一般星形域总可通过平移化到这种情形.

首先要在 $p=1$ 情形证明定理 2.12.1 ($n \geqslant 1$). 设

$$\omega \in \Omega_1^{(n)}(U,F)$$

是 C^n 类的 1 形式. 令

$$\boxed{f(x) = \int_0^1 \omega(tx;x)dt} \tag{2.13.1}$$

先证明 $f: U \to F$ 是 C^n 类映射. 令 $\varphi(x,t) = \omega(tx;x)$. 由引理 2.12.2 及系 2.12.3, 只须证明: 对于固定的 t, φ 属于 C^n 类, 并且 $\varphi, \varphi'_x, \cdots, \partial^n\varphi/\partial x^n$ 是从 $U\times I$ 到 F 的连续映射, $\mathscr{L}(E;F), \cdots, \mathscr{L}_n(E;F)$. 为此, 只须证明 $\varphi: U\times I \to F$ 属于 C^n 类. 然而 φ 可由下列映射复合而得:

1) $U\times I \to U\times E$, 它把 (x,t) 变成 (tx,x); 这映射存在, 因为 U 关于 O 是星形域; 这映射属于 C^∞ 类;

2) $U\times E \to \mathscr{L}(E;F)\times E$, 它把 (x,ξ) 变成 $(\omega(x),\xi)$; 如同 ω, 这映射属于 C^∞ 类;

3) $\mathscr{L}(E;F)\times E \to F$, 它把 (f,ξ) 变成 $f(\xi)$; 这映射是连续双线性的, 因此属于 C^∞ 类.

这样, φ 是三个 C^n 类映射的复合映射, 从而也属于 C^n 类. 于是 (2.12.1) 所确定的映射 f 属于 C^n 类.

命题 2.13.1. 用上面的记号, 假定 $d\omega = 0$, 那么我们有 $df = \omega$. [这对 $p = 1$ 证明了庞加莱定理.]

证. 总是令 $\varphi(x,t) = \omega(tx;x) = \omega(tx)\cdot x$. 由引理 2.12.2, 我们有

$$f'(x) = \int_0^1 \varphi'_x(x,t)dt.$$

计算 φ'_x; 我们要取复合映射的导出映射. 因此我们有: 对于 $\xi \in E$,

$$\varphi'_x \cdot \xi = t(\omega'_x(tx)\cdot\xi)\cdot x + \omega(tx)\cdot\xi,$$

然而假设 $d\omega = 0$ 表明 $(\omega'_x\cdot\xi_1)\cdot\xi_2$ 是 ξ_1 及 ξ_2 的对称双线性映射. 由此得

$$\varphi'_x \cdot \xi = t(\omega'_x(tx)\cdot x)\cdot\xi + \omega(tx)\cdot\xi,$$

这就是说

$$\varphi'_x = t\omega'_x(tx)\cdot x + \omega(tx).$$

直接计算表明: 上式右边等于

$$t\omega(tx)$$

关于 t 的导出映射. 因此令 $g(t) = t\omega(tx)$,

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(t\omega(tx))dt$$

等于 $g(1) - g(0)$. 由此得

$$f'(x) = \omega(x),$$

这正好证明了 ω 等于微分形式 df. 证完.

例. 设 $E = \mathbb{R}^n$, 用典范写法, 我们有

$$\omega = \sum_{i=1}^n c_i(x)dx_i,$$

其中 $c_i : U \to F$ 是一些 C^n 类映射. 假设 $d\omega = 0$ 可写成

$$\frac{\partial c_i}{\partial x_j} = \frac{\partial c_j}{\partial x_i} \quad 对于\ 1 \leqslant i,j \leqslant n.$$

在这里, 关系式 (2.13.1) 给出:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 x_i c_i(tx)dt.$$

这映射属于 C^n 类, 并且满足 $df=\omega$, 这就是说,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=c_i \quad 对于\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

现证明一般情形 (对任何 p) 下的庞加莱定理. 对于任何 p, 我们要确定线性映射

$$k:\Omega_p^{(n)}(U,F)\to\Omega_{p-1}^{(n)}(U,F)$$

如下: 对于 $p=0$, 约定对任何 $f\in\Omega_0^{(n)}(U,F), k(f)=0$, 这就回到约定向量空间 $\Omega_{-1}^{(n)}(U,F)$ 化为零. 对于 $p\geqslant 1$, 设 $\omega\in\Omega_p^{(n)}(U,F)$; 确定 $k(\omega)$ 如下: 它是由下式确定的微分形式 $\alpha\in\Omega_{p-1}^{(n)}(U,F)$:

$$\boxed{\alpha(x;\xi_1,\cdots,\xi_{p-1})=\int_0^1 t^{p-1}\omega(tx;x,\xi_1,\cdots,\xi_{p-1})dt}. \tag{2.13.2}$$

自然必须验证这正好确定一个 C^n 类的微分 $p-1$ 形式 $\alpha:U\to\mathscr{A}_{n-1}(E;F)$. 为此, 我们如同对于 $p=1$ 那样进行: 把下列交错 $(p-1)$ 线性映射记作 $\omega(tx;x)$:

$$(\xi_1,\cdots,\xi_{p-1})\mapsto\omega(tx;x,\xi_1,\cdots,\xi_{p-1}).$$

把 (2.13.2) 的右边看作 $\xi_1,\cdots,\xi_{p-1}$ 的交错多重线性映射, 它就是

$$\int_0^1 t^{p-1}\omega(tx;x)dt;$$

这表明 $\alpha(x)\in\mathscr{A}_{p-1}(E;F)$. 为了证明 α 属于 C^n 类, 由引理 2.12.2 及系 2.12.3, 只须证明映射

$$(x,t)\mapsto t^{p-1}\omega(tx;x)$$

属于 C^n 类. 然而这映射是下列三映射的复合映射:

1° 映射 $U\times I\to U\times I\times E$, 它把 (x,t) 变换成 (tx,t,x); 这映射存在, 因为 U 是关于原点的星形域, 它属于 C^∞ 类;

2° 映射 $U\times I\times E\to\mathscr{A}_p(E;F)\times E$, 它把 (x,t,ξ) 变到 $(t^{p-1}\omega(x),\xi)$; 如同 ω, 它属于 C^n 类;

3° 映射 $\mathscr{A}_p(E;F)\times E\to\mathscr{A}_{p-1}(E;F)$, 它把 (f,ξ) 变换成下式确定的 $\mathscr{A}_{p-1}(E;F)$ 中的元素:

$$(\xi_1,\cdots,\xi_{p-1})\to f(\xi,\xi_1,\cdots,\xi_{p-1}).$$

这映射属于 C^∞ 类.

这样就证明了公式 (2.13.2) 正好确定了一个 C^n 类微分 $(p-1)$ 形式.

命题 2.13.2. 在前面的假设下 (星形域 U):

(a) 如果 $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U,F)$, 其中 $n \geqslant 1, p \geqslant 1$, 我们有

$$\boxed{d(k(\omega)) + k(d\omega) = \omega}; \tag{2.13.3}$$

(b) 如果 $f \in \Omega_0^{(n)}(U,F)$, 其中 $n \geqslant 1$, 我们有

$$\boxed{k(df) = f - f_0}. \tag{2.13.4}$$

这里把值是 $f(0)$ 的常量映射 $U \to F$ 记作 f_0.

在证明这命题之前, 先证明由它可导出庞加莱定理 (定理 2.12.1): 如果在 (a) 中假定 $d\omega = 0$, 事实上, 关系式 (2.13.3) 就说明了

$$\omega = d(k(\omega)).$$

这样, 算子 k 提供了一个形式 $k(\omega) = \alpha$, 使得 $d\alpha = \omega$.

注意 (b) 又一次证明了: 如果 $df = 0$, 那么 f 是常量.

命题 2.13.2 的证明. 先证明 (b): 事实上, 形式 $k(df)$ 是映射

$$x \mapsto \int_0^1 (f'(tx)\cdot x)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx)) = f(x) - f(0).$$

害怕计算的读者可不读以下的证明. 我们把它提供给勇敢的读者. 我们先看 (a), 并假定 $p \geqslant 1$, 我们记得

$$(d\omega)(x;\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_p) = (\omega'(x)\cdot\xi_0)(\xi_1,\cdots,\xi_p) \\ + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i(\omega'(x)\cdot\xi_i)(\xi_0,\cdots,\widehat{\xi_i},\cdots,\xi_p). \tag{2.13.5}$$

由此得

$$(d\omega)(tx;x,\xi_1,\cdots,\xi_p) = (\omega'(tx)\cdot x)\cdot(\xi_1,\cdots,\xi_p) \\ + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i(\omega'(tx)\cdot\xi_i)\cdot(x,\xi_1,\cdots,\widehat{\xi_i},\cdots,\xi_p).$$

因此形式 $k(d\omega) = \beta$ 由下式确定

$$\beta(x;\xi_1,\cdots,\xi_p) = \int_0^1 t^p(\omega'(tx)\cdot x)\cdot(\xi_1,\cdots,\xi_p)dt \\ + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i\int_0^1 t^p(\omega'(tx)\cdot\xi_i)\cdot(x,\xi_1,\cdots,\widehat{\xi_i},\cdots,\xi_p)dt. \tag{2.13.6}$$

另一方面, $(p-1)$ 微分形式 $k(\omega)=\alpha$ 是由 (2.13.2) 给出的; 在积分号下求导数, 我们得到:

$$\begin{aligned}&(\alpha'(x)\cdot\xi_1)\cdot(\xi_2,\cdots,\xi_p)\\&=\int_0^1 t^p(\omega'(tx)\cdot\xi_1)\cdot(x,\xi_2,\cdots,\xi_p)dt+\int_0^1 t^{p-1}\omega(tx;\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p)dt.\end{aligned}\tag{2.13.7}$$

由此得

$$\begin{aligned}(d\alpha)(x;\xi_1,\cdots,\xi_p)=&\sum_{i=1}^p(-1)^{i-1}\int_0^1 t^p(\omega'(tx)\cdot\xi_i)\cdot(x,\xi_1,\cdots,\widehat{\xi_i},\cdots,\xi_p)dt\\&+\sum_{i=1}^p(-1)^{i-1}\int_0^1 t^{p-1}\omega(tx;\xi_i,\xi_1,\cdots,\widehat{\xi_i},\cdots,\xi_p)dt.\end{aligned}\tag{2.13.8}$$

由于 ω 是 $\xi_1,\cdots,\xi_p$ 的交错映射, 上式右边第二项等于

$$p\int_0^1 t^{p-1}\omega(tx;\xi_1,\cdots,\xi_p)dt.$$

最后可计算 (2.13.3) 的左边: 应用我们的记号, 微分形式 $d(k(\omega))+k(d\omega)$ 等于 $d\alpha+\beta$; 把关系式 (2.13.6) 及 (2.13.8) 两边分别相加来表示它. 简化后得

$$\begin{aligned}&\beta(x;\xi_1,\cdots,\xi_p)+d\alpha(x;\xi_1,\cdots,\xi_p)\\&=\int_0^1 t^p(\omega'(tx)\cdot x)\cdot(\xi_1,\cdots,\xi_p)dt+p\int_0^1 t^{p-1}\omega(tx;\xi_1,\cdots,\xi_p)dt,\end{aligned}$$

更简单地可写出

$$\beta(x)+d\alpha(x)=\int_0^1[t^p(\omega'(tx)\cdot x)+pt^{p-1}\omega(tx)]dt.\tag{2.13.9}$$

[$\mathscr{A}_p(E;F)$ 的元素之间的等式], 然而

$$t^p(\omega'(tx)\cdot x)+pt^{p-1}\omega(tx)=\frac{d}{dt}(t^p\omega(tx)),$$

因此 (2.13.9) 的右边等于 $t^p\omega(tx)$ 对于 $t=1$ 及对于 $t=0$ 的值之差, 即最后等于 $\omega(x)$, 这就终于证明了 (2.13.3). 证完.

这样完成了命题 2.13.2 的证明, 同时也完成了庞加莱定理的证明.

例. 设 $E=\mathbb{R}^3$, 并且假定 $F=\mathbb{R}$; 设

$$\alpha=Pdx+Qdy+Rdz$$

是 $C^n(n\geqslant1)$ 类的微分形式: 因此 P,Q,R 是在开集 $U\subset\mathbb{R}^3$ 中确定的 C^n 类数值函数. 我们有

$$d\alpha=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy.$$

如果把函数 P, Q, R 看作在 U 中确定一个 "向量场" (即一个映射 $U \to \mathbb{R}^3$), 那么由

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

所确定的场称为场 (P, Q, R) 的*旋度场*. 反过来说, 设已给一个 C^n 类的 2 形式

$$\omega = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy;$$

"场" (A, B, C) 必须满足什么条件, 才能存在着一个 C^n 类场 (P, Q, R), 使得 (A, B, C) 是它的旋度场? 条件是存在着一个 C^n 类 1 形式 α, 使得 $d\alpha = \omega$. 一个*必要条件*是 $d\omega = 0$ (至少如果 $n \geqslant 2$); 庞加莱定理表明: 当 U 是*星形域*时, 这条件是*充分的*. 因为

$$d\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz,$$

这条件可立即显示出来: 它就是场 (A, B, C) 的 "散度" 恒等于零; 由定义, 场 (A, B, C) 的散度就是函数

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}.$$

3. 一次微分形式的线积分

U 总是表示巴拿赫空间 E (我们关注的将是 $E = \mathbb{R}^n$ 或 $E = \mathbb{C}^n$ 情形) 中的一个开集.

3.1. C^1 类道路

我们已经给出了 (参看上编《微分学》, 第一章, 3.3 段) 拓扑空间 X 中道路的定义, 在这里 $X = U$, 因此 U 中的道路是连续映射

$$\gamma : [a, b] \to U,$$

其中 $[a, b]$ 表示 $\mathbb{R}$ 中的紧区间 $a \leqslant t \leqslant b$. (在 3.3 段中, 我们只考虑过参变量取在 $[0, 1]$ 中的道路.)

定义. 如果映射 γ 属于 C^1 类, 也就是说, 如果 γ 有导出映射 $\gamma'(t)$ 连续依赖于 $t \in [a, b]$, 那么道路 γ 就叫做属于 C^1 类.

(*注意*: 完全严格地说, C^1 类映射概念只是对巴拿赫空间中开集的映射确定的; 在现在情形下, 应当考虑 $\mathbb{R}$ 的开区间中所确定的映射. 对于一个闭区间 $[a, b]$, 按定义, $\gamma'(a)$ 是 γ 在点 a 的右导数, $\gamma'(b)$ 是在点 b 的左导数, 容易看出, 如果 $\gamma : [a, b] \to U$ 在新的意义下属于 C^1 类, 那么存在着一个开区间 I 包含 $[a, b]$, 和一个映射 $\gamma_1 : I \to U$ 属于 C^1 类, 使得 γ 是它的限制.)

定义. 设有道路 $\gamma : [a,b] \to U$; 如果线段 $[a,b]$ 有有限个细分点

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \tag{3.1.1}$$

使得 γ 在每个线段 $[t_i, t_{i+1}]$ (其中 $0 \leqslant i < n$) 的限制属于 C^1 类, 就说道路 γ 是"分段属于 C^1 类".

如果 γ 符合上列定义, 左导数 $\gamma'_{\mathrm{g}}(t_i)$ 及右导数 $\gamma'_{\mathrm{d}}(t_i)[0 < i < n]$ 存在, 但不一定相等. 当然, 如果 γ 是分段属于 C^1 类的道路, $[a,b]$ 可能有多种细分法具有上述性质. 如果其中之一是 (3.1.1), 并且如果另一个是

$$a = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_p = b, \tag{3.1.2}$$

连带它们作第三种细分法, 叫做由上两细分法叠加而得:

$$a = t''_0 < t''_1 < \cdots < t''_q = b; \tag{3.1.3}$$

确定这种细分法如下: 集 $\{t''_0, \cdots, t''_q\}$ 是集 $\{t_0, \cdots, t_n\}$ 与集 $\{t'_0, \cdots, t'_p\}$ 的并集. [因此我们有 $q \leqslant n + p - 1$.]

3.2. 线积分

设 ω 是 U 中的 C^0 类一次微分形式, 在 F 中取值; 换句话说, ω 是一连续映射

$$\omega : U \to \mathscr{L}(E; F)$$

对于 $x \in U$, 与过去一样, 把 $\omega(x) \in \mathscr{L}(E; F)$ 对于 $\xi \in E$ 的值记作 $\omega(x) \cdot \xi$ 或 $\omega(x; \xi)$; 它是巴拿赫空间 F 中的一个元素.

积分 $\displaystyle\int_\gamma \omega$ 的定义, 其中 γ 是 U 中的 C^1 类道路:

$$\gamma : [a,b] \to U.$$

由定义, 我们有

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b f(t)dt, \tag{3.2.1}$$

其中 $f(t)dt$ 是微分形式 $\gamma^*(\omega)$: 这是 $[a,b]$ 上的微分形式, 由 ω 通过 C^1 类变量代换 γ 而得. 映射 $t \mapsto f(t)$ 是连续的, 并且如果我们阐明变量代换的定义 (参看 2.8 段), 就得到

$$f(t) = \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \tag{3.2.2}$$

(这里 $\gamma'(t)$ 看作 E 中的一个元素, 在周围空间 U 中). 在 (3.2.1) 的右边, 简单地涉及连续映射在紧区间上 (柯西 — 黎曼意义) 的积分.

由积分的经典性质导出: 对于已给 (C^1 类) 道路 γ, $\int_\gamma \omega$ 是 ω 的线性映射. 而且如果有 $[a,b]$ 的细分 (13.1.1), 又如果把由 γ 在线段 $[t_i,t_{i+1}](0\leqslant i<n)$ 上的限制而得的道路记作 γ_i, 那么简单地由于

$$\int_a^b f(t)dt=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt,$$

我们有

$$\int_\gamma \omega=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\gamma_i}\omega \tag{3.2.3}$$

现在要定义 $\int_\gamma \omega$, 其中 γ 是分段 C^1 类道路, 选取一组细分法 (3.1.1), 使得 γ 在 $[t_i,t_{i+1}]$ 上的限制 γ_i 属于 C^1 类. 并且这些 i 满足 $0\leqslant i\leqslant n-1$. 作为定义, 令

$$\int_\gamma \omega=\sum_i\int_{\gamma_i}\omega,$$

上式右边已有意义. 为了说明这一定义合理, 只要证明: 1) 上式右边的值与细分法的选取无关; 2) 在 γ 属于 C^1 类这一特殊情形, $\int_\gamma \omega$ 的新定义与原定义相符.

然而明显地, 如果 1) 是正确的, 那么由已对 γ 属于 C^1 类情形证明了的关系式 (3.2.3), 恰好可导出 2). 我们来证明 1): 取另一细分法 (3.1.2), 使得 γ 在每个线段 $[t'_j,t'_{j+1}]$ 上的限制属于 C^1 类 $(0\leqslant j<p)$. 于是设 (3.1.3) 是由叠加而得的细分法. 用$\overline{\gamma}_j$ 表示 γ 在 $[t'_j,t'_{j+1}]$ 上的限制, 用 $\overline{\overline{\gamma}}_k$ 表示 γ 在 $[t''_k,t''_{k+1}]$ 上的限制. 考虑和式

$$\sum_{k=0}^{q-1}\int_{\overline{\overline{\gamma}}_k}\omega;$$

明显地, 适当合并一些项, 我们得到

$$\sum_{i=1}^{n-1}\int_{\gamma_i}\omega,$$

用另一种方式并项, 就得到

$$\sum_{j=0}^{p-1}\int_{\overline{\gamma}_j}\omega$$

因此我们正好有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\gamma_i}\omega=\sum_{j=0}^{p-1}\int_{\overline{\gamma}_j}\omega;$$

这就说明了上面给出的定义是合理的.

注意. 在前面的假设下, 我们有

$$\gamma_i^*(\omega) = f_i(t)dt,$$

其中 f_i 是在 $[t_i, t_{i+1}]$ 上的连续映射. 在 $[a,b]$ 中, 可能除去点 $t_i(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 外, 全体 f_i 确定映射 f; 而在 t_i, f 不连续. 简单地说, f 是所谓分段连续映射, 并且 $\int_\gamma \omega$ 等于分段连续映射 f 的积分 $\int_a^b f(t)dt$. 有了这种惯例, 可以约定当 γ 分段属于 C^1 类时, $\gamma^*(\omega)$ 等于 $f(t)dt$, 其中 f 是分段连续映射 (在不连续点, 映射的值没有确定). 于是当 γ 属于 C^1 类时作为 $\int_\gamma \omega$ 的定义的关系式 (3.2.1), 当 γ 分段属于 C^1 类时仍然适用.

3.3. 参变量代换

设 $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$是从线段 $[a', b']$ 到线段 $[a, b]$ 的微分同胚. 导数 $\varphi'(u)$ (对于 $a' \leqslant u \leqslant b'$) 是 $\neq 0$; 因此它保持符号不变. 两种情形是可能的:

1) $\varphi'(u) > 0$ 对任何 u; 于是 $\varphi(a') = a, \varphi(b') = b$;

2) $\varphi'(u) < 0$ 对任何 u; 于是 $\varphi(a') = b, \varphi(b') = a$.

在第一种情形, 我们说 φ 保持定向; 在第二种情形, 我们说 φ 改变定向.

注意如果 $\gamma : [a, b] \to U$ 是一条分段 C^1 类道路,

$$\gamma \circ \varphi : [a', b'] \to U$$

是一条分段 C^1 类道路, 我们说道路 $\gamma \circ \varphi$ 是由道路 γ 通过参变量代换 φ 导出的.

命题 3.3.1. 用前面的记号, 我们有

$$\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int_\gamma \omega, \quad \text{如果 } \varphi \text{ 保持定向}, \tag{3.3.1}$$

$$\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = -\int_\gamma \omega, \quad \text{如果 } \varphi \text{ 改变定向}. \tag{3.3.2}$$

证. 只须对道路 γ 属于 C^1 类情形作证, 因为把线段 $[a, b]$ 细分, 就可化到一般情形, 通过 $\varphi, [a', b']$ 的细分就相应于前一细分. 因此假定 γ 属于 C^1 类. 由定义有

$$\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int_{a'}^{b'} (\gamma \circ \varphi)^* \omega.$$

然而 (参看命题 2.11.1) 我们有 $(\gamma \circ \varphi)^*\omega = \varphi^*(\gamma^*\omega)$; 如果令

$$\gamma^*\omega = f(t)dt,$$

我们有

$$\varphi^*(\gamma^*\omega) = f(\varphi(u))\varphi'(u)du,$$

由此得

$$\int_{\gamma\circ\varphi}\omega=\int_{a'}^{b'}f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

如果 φ 保持定向, 我们有 $\varphi(a')=a,\varphi(b')=b$, 并且 “单积分中变量代换” 的经典公式 (见下) 给出:

$$\int_{a'}^{b'}f(\varphi(u))\varphi'(u)du=\int_a^b f(t)dt,$$

这就证明了 (3.3.1). 反之, 如果 φ 改变定向, 我们有 $\varphi(a')=b,\varphi(b')=a$, 同样的公式给出

$$\int_{a'}^{b'}f(\varphi(u))\varphi'(u)du=\int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt,$$

这就证明了 (3.3.2).

注意. 下面我们回顾单积分中变量代换公式的证明 (参看系 3.4.2 后的注意).

3.4. ω 是映射的微分情形

设 $g:U\to F$ 是 C^1 类映射. 取微分 dg 作为微分形式.

命题 3.4.1. 如果 $\gamma:[a,b]\to U$ 是分段 C^1 类道路, 我们有

$$\boxed{\int_\gamma dg=g(\gamma(b))-g(\gamma(a))}. \tag{3.4.1}$$

[右边是 g 在 γ 的终点及起点之值的差.]

证. 只须对 γ 属于 C^1 类情形证明, 因为细分线段 $[a,b]$, 可把一般情形化到这一特殊情形. 由定义, 我们有

$$\int_\gamma dg=\int_a^b\gamma^*(dg)=\int_a^b d(\gamma^*(g))=\int_a^b d(g\circ\gamma).$$

令 $g\circ\gamma=h;h$ 是 C^1 类映射: $[a,b]\to F$. 我们有 $dh=h'(t)dt$, 由此最后得

$$\int_\gamma dg=\int_a^b h'(t)dt,$$

而我们知道上式右边是 $h(b)-h(a)$. [回忆这一事实的证明:

$$\int_a^\tau h'(t)dt$$

是 τ 的映射, 它有导出映射 $h'(\tau)$, 因为映射 h' 是连续的; 因此

$$\int_a^\tau h'(\tau)dt-h(\tau)$$

是一常量 (导出映射是零的映射). 写出上列积分对于 $\tau = a$ 及对于 $\tau = b$ 取同一值, 就得到

$$\int_a^b h'(t)dt = h(b) - h(a).]$$

用 $g \circ \gamma$ 代替 h, 正好得到要证明的关系式 (3.4.1).

系 3.4.2. 如果 ω 是 C^1 类映射 g 的微分, 积分 $\int_\gamma \omega$ 只与道路 γ 的起点 $\gamma(a)$ 及终点 $\gamma(b)$ 有关.

注意. 任何连续映射 $f : [a,b] \to F$ 等于 h', 即由下列积分所确定映射的导出映射:

$$h(t) = \int_a^t f(u)du.$$

作 C^1 类变量代换 $\varphi : [a',b'] \to [a,b]$, 其中 $\varphi(a') = a, \varphi(b') = b$, 我们有

$$\int_a^b f(t)dt = h(b) - h(a) = h(\varphi(b')) - h(\varphi(a')) = \int_{a'}^{b'} (h \circ \varphi)'(u)du,$$

而且由于 $(h \circ \varphi)'(u) = h'(\varphi(u)) \circ \varphi'(a) = f(\varphi(u)) \circ \varphi'(u)$, 于是证明了在 3.3 段中已用过的 "变量代换公式".

定义. 已给微分 1 形式 $\omega : U \to \mathscr{L}(E;F)$ 及任何 C^1 类映射 $f : U \to F$; 如果 $df = \omega, f$ 就叫做 ω 的*原映射*.

通常一次微分形式没有原映射 (参看 2.12). 如果 U 是连通的, ω 的两个原映射 f_1 及 f_2 的差是常量, 这是由于 $d(f_1 - f_2) = 0$.

在叙述下列定理前, 先把名词确定一下: *环路* (法文 "lacet")① 是起点与终点相重合的道路; **折环路**是本身是折线的环路 (参看上编《微分学》, 第一章, 3.3 段).

定理 3.4.3. 设 U 是巴拿赫空间 E 中的连通开集. 对于 C^0 类微分形式 $\omega : U \to \mathscr{L}(E;F)$, 下列性质等价:

(a) ω 在 U 中有原映射;

(b) 对于 U 中任何分段 C^1 类环路 $\gamma, \int_\gamma \omega = 0$;

(c) 对于 U 中任何 "折环路" $\gamma, \int_\gamma \omega = 0$;

此外, 如果 U 关于一点 $x_0 \in U$ 是星形集, 上列各条件等价于:

(d) 对于包含在 U 内, 并且以 x_0 为顶点的任何三角形 $\gamma, \int_\gamma \omega = 0$.

关于 (d) 的说明. 所谓以 x_0 为顶点的 "三角形", 指的是三角形的周边, 即起点 x_0、终点 x_0 并且由三条直线段构成的折环路. 我们假定三角形的边包含在 U 内, 而三边围成的部分平面不一定在 U 内.

①译者按: lacet 及 lacet brisé 两词似译为 "环路" 及 "折环路" 较妥.

证. 根据命题 3.4.1, 由 (a) 可导出 (b): 因为在这命题中, 如果 $\gamma(b)=\gamma(a)$, 就得到 $\int_\gamma dg=0$.

由 (b) 可导出 (c) 是显而易见的 [因为 "折环路" 形成特殊一类环路]. 我们要证明由 (c) 可导出 (a); 证明了这一点就证明了 (a), (b), (c) 等价. 为此, 假定 (c) 是正确的; 选取一点 $x_0\in U$; 由于 U 是连通的 (见《微分学》, 第一章, 命题 3.3.5), 任何 $x\in U$ 是 U 中起点 x_0 的一条折线 γ 的终点. 对于已给一点 x, 积分 $\int_\gamma \omega$ 不依赖于 γ 的选取: 因为如果我们有两条起点 x_0、终点 x 的折线 γ_1 及 γ_2, 那么差式

$$\int_{\gamma_1}\omega-\int_{\gamma_2}\omega$$

等于 ω 沿一条折环路的积分; 这条折环路由 γ_1 及 γ_2 组成, 积分先沿 γ_1、然后按反方向沿 γ_2 求出; 于是由 (c), 这积分等于零. 设 $f(x)$ 是沿起点是 x_0、终点是 x 的道路 γ 的积分 $\int_\gamma \omega$ 之公有值. 我们要证明这样确定的映射 $f: U\to F$ 有导出映射 $f'(x)$, 它等于 ω, 这样就证明了 (a).

设 $[x, x+h]$ 是起点 x、终点 $x+h$ 的线段; 如果 $\|h\|$ 充分小, 这线段包含在 U 内; 这是因为 U 是开集, 从而包含一个以 x 为心的球. 记:

$$\int_x^{x+h}\omega$$

为沿这一直线段的积分. 如果我们相继通过一个起点 x_0、终点 x 的折线以及直线段 $[x, x+h]$, 那么我们总共通过了起点 x_0、终点 $x+h$ 的折线; 因此我们有

$$f(x+h)=f(x)+\int_x^{x+h}\omega. \tag{3.4.2}$$

为了计算 $\int_x^{x+h}\omega$, 作变量代换

$$\gamma(t)=x+th \quad (0\leqslant t\leqslant 1);$$

由 (3.2.2), 求得

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^1 g(t)dt \tag{3.4.3}$$

其中

$$g(t)=\omega(x+th)\cdot h \tag{3.4.4}$$

由于 $\omega: U\to \mathscr{L}(E;F)$ 是一连续映射, 对每个 $\varepsilon>0$, 可连带取一个 $\eta>0$, 使得对于 $\|h\|\leqslant\eta$, 有: 对任何 $t\in[0,1]$,

$$\|\omega(x+th)-\omega(x)\|\leqslant\varepsilon.$$

由此导出: 对于 $\|h\| \leqslant \eta$, 有: 对任何 $t \in [0,1]$,

$$\|g(t)-g(0)\| \leqslant \varepsilon\|h\|.$$

然而我们有

$$f(x+h)-f(x)-\omega(x)\cdot h=\int_0^1 (g(t)-g(0))dt,$$

由此得: 对于 $\|h\| \leqslant \eta$,

$$\|f(x+h)-f(x)-\omega(x)\cdot h\| \leqslant \varepsilon\|h\|.$$

这就证明了

$$\|f(x+h)-f(x)-\omega(x)\cdot h\| = o(\|h\|);$$

上式表明 f 可微, 并且它的导出映射 $f'(x)$ 等于 $\omega(x)$. (c)⇒(a) 的证明完成.

现假设 U 是关于 x_0 的星形集. 明显地由 (c) 可导出 (d), 而如果我们证明了由 (d) 可导出 (a), 就导出了 (d) 与 (a), (b) 及 (c) 等价. 然而由于 U 是星形集, 可以确定

$$f(x)=\int_{x_0}^{x} \omega, \tag{3.4.5}$$

其中积分是沿着起点 x_0、终点 x 的直线段取的. 于是我们有: 对于充分小的 $\|h\|$,

$$f(x+h)-f(x)=\int_x^{x+h} \omega,$$

其中积分是沿着起点 x、终点 $x+h$ 的线段取的: 这正是可由假设 (d) 推出的结果. 与上面一样, 可证明 f 可微, 并且 $f'=\omega$; 因此 (a) 是正确的.

定理 3.4.3 证完.

注意. 当 U 是关于原点 O 的星形集, 并且阐明 (3.4.5) (其中 $x_0=0$) 时, 我们求得

$$f(x)=\int_0^1 (\omega(tx)\cdot x)dt; \tag{3.4.6}$$

这就是用来证明庞加莱定理的公式 (2.13.1). 因此只要微分形式 ω 属于 C^0 类, 并且有原函数, 上列公式适用 (在关于 O 的星形开集中). (在庞加莱定理中, 已假定 ω 属于 C^1 类, 并且证明了如果 $d\omega=0, \omega$ 有原映射. 而且反过来说, 如果 C^1 类的 ω 有原映射 f, 那么 f 属于 C^2 类; 因此我们有 $d(df)=0$, 即 $d\omega=0$.)

3.5. 一次闭微分形式

定义. 已给微分 1 形式 $\omega: U \to \mathscr{L}(E;F)$ (其中 U 表示巴拿赫空间 E 中任一开集); 如果任一点 $x_0 \in U$ 有一邻域, 在其中 ω 有原映射, 就说 ω 是闭的. 简单地说, 要求 ω 局部有原映射.

命题 3.5.1. 要使 ω 是闭的, 必须而且只须任何点 $x_0 \in U$ 有一开邻域 V 关于 x_0 是星形集, 使得对包含在 V 内的任何三角形 γ, 我们有

$$\int_\gamma \omega = 0. \tag{3.5.1}$$

[简单地说, 对于所有包含在 U 内充分小的三角形 γ, 积分 (3.5.1) 必须是零.]

这结果可由定义及定理 3.4.3 的判别准则 (d) 立即得到.

定理 3.5.2. 如果 ω 属于 C^1 类, 要使 ω 是闭形式的一个必要及充分条件是 $d\omega = 0$.

事实上, 我们刚才看到, 在一个星形开集中, C^1 类形式 ω 有原映射的一个必要与充分条件是 $d\omega = 0$.

我们记得: 如果 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, ω 可写成

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)dx_i,$$

其中系数 c_i 是 C^1 类映射; 条件 $dw = 0$ 于是可由下列关系式表示出来:

$$\frac{\partial c_i}{\partial x_j} = \frac{\partial c_j}{\partial x_i};$$

要使形式 ω 是闭的, 即局部有原映射, 上列关系式是必要及充分的.

注意. 开集 $U \subset E$ 中的闭 1 形式 ω (甚至如果它属于 C^0 类) 并不总是在整个 U 中有原映射 (可以参看下面的定理 3.8.1). 例如取 $E = \mathbb{C}$, 并且设

$$U = \mathbb{C} - \{0\}.$$

即原点的余集, 把 z 记作 $\mathbb{C}$ 中一点的复坐标, 这是在 U 中到处 $\neq 0$ 的一个函数, 设

$$\omega = \frac{1}{z}dz$$

是 U 中 C^∞ 类的一次微分形式, 这是一个闭形式, 因为由 $dz \wedge dz = 0$ 可得

$$d\omega = d\left(\frac{1}{z}\right) \wedge dz = -\frac{1}{z^2}dz \wedge dz = 0.$$

为了证明 ω 在整个 U 中没有原映射, 只须证明定理 3.4.3 中的条件 (a) 不成立. 因此我们要举出 U 中一个环路 γ, 使得 $\int_\gamma \omega \neq 0$; 现举出心是 O、半径是 1 的圆, 用参变量表示为

$$z = e^{it} \quad 对于 \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{3.4.7}$$

(假定读者已知复指数). 变量代换 (3.4.7) 把 $\omega = (1/z)dz$ 变换成

$$e^{-it}(ie^{it}dt) = idt$$

由此得

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i \neq 0.$$

如果令 $z = x + iy$, 我们有

$$\frac{dz}{z} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + i\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

由此得

$$\int_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

3.6. 闭形式沿一条道路的原映射

设 $\omega : U \to \mathscr{L}(E; F)$ 是 C^0 类微分 1 形式, 假定它是闭的.

定义. 对于任何道路 $\gamma : [a, b] \to U$ (考虑连续道路, 不假设 γ 属于分段 C^1 类); 设有连续映射

$$f : [a, b] \to F$$

满足下列条件: 对于任何 $t_0 \in [a, b]$, 存在着 $\gamma(t_0)$ 的一个开邻域 $V \subset U$, 以及 ω 在 V 内的一个原映射 F, 使得对于充分接近于 t_0 的 $t \in [a, b]$, 我们有

$$F(\gamma(t)) = f(t).$$

那么 f 叫做 ω 沿 γ 的原映射.

[注意. 在这定义中, 自然地假定 $V \subset U$; 而且可假定 V 是连通的; 于是 ω 在 V 内的所有原映射有形式 $F+$ 常量].

定理 3.6.1. 如果 ω 是 U 内的闭微分 1 形式, 并且 γ 是 U 内的一条连续道路, 那么存在着 ω 沿 γ 的一个原映射 f; 这种原映射除了可加上一个常数外, 是唯一的.

证. 先证明唯一性. 设 f_1 及 f_2 是两个原映射. 如果 $t_0 \in [a, b]$, 那么存在着 $\gamma(t_0)$ 的一个连通邻域 V, 在其中 ω 有两个原映射 F_1 及 F_2, 使得: 对于与 t_0 充分接近的 t,

$$f_1(t) = F_1(\gamma(t)), f_2(t) = F_2(\gamma(t))$$

然而 $F_2 - F_1 =$ 常数; 因此 $f_2(t) - f_1(t)$ 在 t_0 的邻域内是常数. 从而差式 $f_2 - f_1$ 在 $[a, b]$ 上是连续映射, 并且局部是常数. 然而 $[a, b]$ 是一连通拓扑空间. 由此推出 $f_2 - f_1$ 在 $[a, b]$ 上是常数 (参看《微分学》, 第一章, 3.3 段中引理).

现证明沿 γ 原函数 f 存在. 由定义, 每点 t_0 包含在一个开区间内 (关于 $[a, b]$ 的开集), 在其中有一个原函数. 由于 $[a, b]$ 是紧集, 可用有限个这样的开区间覆盖它. 把这些开区间按序排列, 使得如果 $I_1, \cdots, I_n$ 表示这些区间, 其中每个 I_k 与前面区间的并集相交. 由假设, 在 I_k 内有原映射 f_k. 而由已证明的唯一性定理, 在 $I_2 \bigcap I_1$

中, $f_2 - f_1$ 是常量. 把 f_2 适当再加上一个常量, 于是就可作出安排, 使得在 $I_2 \bigcap I_1$ 内, $f_2 = f_1$; 设 g_2 是区间 $I_1 \bigcup I_2$ 中的映射, 在 I_1 中等于 f_1, 在 I_2 中等于 f_2; 这是 $I_1 \bigcup I_2$ 中的原映射. 然后, $(I_1 \bigcup I_2) \bigcap I_3$ 中 $f_3 - g_2$ 是常量; 把 f_3 适当加上一常量, 可作出安排, 使得在 $(I_1 \bigcup I_2) \bigcap I_3$ 内, $f_3 = g_2$; 这样就在 $I_1 \bigcup I_2 \bigcup I_3$ 中确定了一个原映射 g_3. 逐步像这样进行, 就可找到在整个 $[a, b]$ 中的一个原映射. 定理得证.

注意 1. 如果映射 γ 是常量, 显然沿 γ 的任何原映射是常量.

注意 2. 在上定理中, 假定道路 γ 属于 C^1 类, 设

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

是一细分, 它使得对于每个区间 $[t_i, t_{i+1}]$, 我们有

$$f(t) = F_i(\gamma(t)), \quad \text{对于 } t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1},$$

其中 F_i 是 ω 在开集 $V_i \subset U(\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset V_i)$ 中的原映射. 把 γ_i 记作 $\gamma : [a, b] \to U$ 在 $[t_i, t_{i+1}]$ 中的限制, 我们有

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} \omega.$$

然而在 V_i 内, 我们有 $\omega = dF_i$, 由此得 $\gamma^*(\omega) = d(\gamma^* F_i) = df$; 由此得

$$\int_{\gamma_i} \omega = \int_{t_i}^{t_{i+1}} df = f(t_{i+1}) - f(t_i).$$

最后,

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}) - f(t_i)) = f(b) - f(a).$$

这结果对一条 C^1 类道路 γ 是正确的, 它对分段 C^1 类 γ 也正确: 我们作细分, 并对细分得到的每条道路应用已证的结果. 于是有:

命题 3.6.2. 设 γ 是分段 C^1 类道路, ω 是一闭形式. 并且 f 是 ω 沿 γ 的原映射. 我们有

$$\boxed{\int_\gamma \omega = f(b) - f(a)}. \tag{3.6.1}$$

在只假定道路 γ 是连续的一般情形下, 原映射 f 存在, 并且除去可能加上一常量外, 是唯一的 (定理 3.6.1). 因此 $f(b) - f(a)$ 是完全确定的. 这就导致把闭 1 形式 ω 的积分 $\int_\gamma \omega$ 定义为等于 $f(b) - f(a)$, 即 ω 沿 γ 的一个原函数在点 a 及点 b 的值的差. 当道路 γ 是常量时, $\int_\gamma \omega = 0$. 当 γ 分段属于 C^1 类时, 由命题 3.6.2, 新定义与原有定义符合. 但原有定义对于非闭形式 ω 也适用. 相反地, 当形式 ω 不是闭的, 并且假定道路 γ 只是连续的时, 给出 $\int_\gamma \omega$ 的定义也不成问题.

3.7. 两条道路的同伦

为了简单起见, 只考虑参变量取在 [0,1] 上的连续道路 (作参变量代换, 总可化到这一情形).

定义. 已给两条道路

$$\gamma_0 : [0,1] \to U, \quad \gamma_1 : [0,1] \to U;$$

如果存在着从正方形

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1$$

(有两坐标 t 及 u 的 $\mathbb{R}^2$ 的一个紧子集) 到 U 内取值的连续映射 δ, 使得对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\delta(t,0) = \gamma_0(t), \quad \delta(t,1) = \gamma_1(t), \tag{3.7.1}$$

那么我们说两道路 γ_0 及 γ_1 是同伦的. 映射 δ 叫做从 γ_0 到 γ_1 的一个同伦. 如果是这样, 每个 $u \in [0,1]$ 确定一条道路

$$\gamma_u : [0,1] \to U,$$

即

$$\gamma_u(t) = \delta(t,u).$$

我们有时说: 道路族 γ_u 确定从道路 γ_0 到道路 γ_1 的一个连续变形.

"γ_0 与 γ_1 同伦" 这一关系是 U 中道路集的一种等价关系. (习题: 证明这一结论).

有固定起点及终点的同伦: 当 γ_0 及 γ_1 有相同起点 $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ 及相同终点 $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ 时, 如果 δ 不仅满足 (3.7.1), 而且对于任何 $u \in [0,1]$, 满足

$$\delta(0,u) = \gamma_0(0), \quad \delta(1,u) = \gamma_0(1), \tag{3.7.2}$$

换句话说, 如果还要求对任何 u, 道路 γ_u 与 γ_0, γ_1 有相同起点及终点, 那么我们说 δ 是有固定起点及终点的同伦.

定理 3.7.1. *设 ω 是开集 $U \subset E$ 中的闭微分 1 形式, 设*

$$\gamma_0 : [0,1] \to U, \quad \gamma_1 : [0,1] \to U$$

是有相同起点及相同终点的两条连续道路. 如果 γ_0 及 γ_1 是有固定起点及终点的同伦道路, 我们有

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega \tag{3.7.3}$$

(这里 "积分" 如同 3.6 段末所说的那样确定).

这定理将可由另一定理推出, 后一定理涉及 ω 的一种原映射的存在性, "这种原映射是沿矩形的一种连续映射取的" (参看下列定义).

定义. 设 δ 是从矩形 (R)

$$a \leqslant t \leqslant b, \quad a' \leqslant u \leqslant b'$$

到开集 $U \subset E$ 中取值的连续映射, 并且设 ω 是 U 中的闭微分 1 形式. 我们把满足下列条件的连续映射 $f: R \to F$ 叫做 ω 沿 δ 的原映射: 对于任何点 (t_0, u_0) 属于矩形 (R), 存在着 $\delta(t_0, u_0)$ 的一个连通开邻域 $V \subset U$, 以及 ω 在 V 内的一个原映射 F, 它对与 (t_0, u_0) 充分接近的 $(t, u) \in R$, 满足

$$F(\delta(t, u)) = f(t, u).$$

如我们看到, 这定义是仿照 "ω 沿一条道路的原映射" 的定义作出的.

定理 3.7.2 (与定理 3.6.1 类似). *用上面的记号, 存在着 ω 沿映射 δ 的原映射; 这种原映射除了可加上一个常数外是唯一的.*

这定理将在稍后证明. 先来看由它推出定理 3.7.1. 因此设 γ_0 及 γ_1 是 U 内有相同起点、相同终点的两条道路, 并且假定 γ_0 及 γ_1 是有相同起点、相同终点的同伦映射, 有一个从正方形

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1$$

到 U 的连续映射 δ, 它满足 (3.7.1) 及 (3.7.2). 由定理 3.7.2 (承认它成立), 存在着 ω 沿 δ 的原映射 f. 于是映射

$$f_0(t) = f(t, 0), \quad f_1(t) = f(t, 1)$$

显然分别是 ω 沿 γ_0 及 γ_1 的原映射 (只须查看沿一条道路的原映射的定义). 要证明的关系式 (3.7.3) 可写出

$$f(1, 0) - f(0, 0) = f(1, 1) - f(0, 1),$$

或

$$f(0, 1) - f(0, 0) = f(1, 1) - f(1, 0) \tag{3.7.4}$$

事实上, 我们要证明 (3.7.4) 的两边都是零: 映射 $u \mapsto f(0, u)$ 实际是 ω 沿道路 $u \mapsto \delta(0, u)$ 的原映射; 由 (3.7.2), 这道路是常量, 因而原映射是常量, 这就证明了

$$f(0, 1) - f(0, 0) = 0.$$

同样证明 $f(1, 1) - f(1, 0) = 0$.

因此定理 3.7.1 可以作为定理 3.7.2 的推论来证明.

定理 3.7.2 的证明. 这证明与定理 3.6.1 的证明类似, 只是略为复杂一些. 先证明: 如果 f_1 及 f_2 是 ω 沿 δ 的两个原映射, 那么差 $f_2 - f_1$ 在矩形 R 上是常量. 为了看出此点, 如同在定理 3.6.1, 我们看出 $f_2 - f_1$ 局部是常量, 然后观察到矩形 R 是连通的 (因为它是两个连通区间的 "积").

余下只要证明 f 沿 δ 的原映射存在. 已知 (由原映射的定义) 每点 $(t_0, u_0) \in R$ 有一开邻域, 在其中有一这样的原映射, 由于 R 是紧的, 可见在 R 中有由两种细分.

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$
$$a' = u_0 < u_1 < \cdots < u_p = b'$$

所确定的足够细的 "长方格分划", 使得任何乘积矩形

$$t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}, \quad u_j \leqslant u \leqslant u_{j+1} \quad (0 \leqslant i < n, 0 \leqslant j < p)$$

有一邻域, 在其中 ω 有沿映射 δ (限制在这邻域内) 的原映射 f_{ij}. 因此有一个 $\varepsilon > 0$ (由于 i 及 j 都只取有限个值, 可选取 ε 与 i 及 j 无关), 使得在矩形 R 中由不等式

$$t_i - \varepsilon < t < t_{i+1} + \varepsilon, \quad u_j - \varepsilon < u < u_{j+1} + \varepsilon$$

所确定的子集上, 有一原映射 f_{ij}. 先固定 $j = 0$, 使 i 从 0 变到 $n-1$; 可逐步对 $f_{0,0}, f_{1,0}, \cdots, f_{n-1,0}$ 加上常量, 使得这些映射在矩形

$$a \leqslant t \leqslant b, \quad a' \leqslant u < u_1 + \varepsilon$$

中衔接起来, 并且确定一个原映射 g_0, 同样, 在矩形

$$a \leqslant t \leqslant b, \quad u_1 - \varepsilon < u < u_2 + \varepsilon$$

中有一个原映射 g_1, 等等. 最后, 我们得到一个原映射序列 $g_0, g_1, \cdots, g_{p-1}$, 并且可逐步对它们加上常量, 使它们衔接起来, 对整个矩形 R 提供一个原映射 f, 证完.

现在要应用定理 3.7.2, 证明与定理 3.7.1 类似的一个定理. 先给出下列定义

定义. 设 γ_0 及 γ_1 是 U 中两条环路 (因此 $\gamma_0(0) = \gamma_0(1), \gamma_1(0) = \gamma_1(1)$); 如果存在着 U 中一个正方形

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1$$

的连续映射 δ, 它不但满足 (3.7.1), 而且满足

$$\delta(0, u) = \delta(1, u) \quad 对于任何 \quad u \in [0, 1]. \tag{3.7.5}$$

那么我们说这两环路 γ_0 及 γ_1 同伦. 条件 (3.7.5) 表明对于每个 u, 道路 $\gamma_u(t) = \delta(t, u)$ 是一条环路, 即它的终点与它的起点重合.

重新设 ω 是 U 中的一个闭 1 形式. 应用定理 3.7.2 到上列映射 δ: 设 f 是沿 δ 的原映射. 由于两条道路

$$u \mapsto \delta(0,u) \quad \text{及} \quad u \mapsto \delta(1,u)$$

相等, 我们有

$$f(0,1)-f(0,0)=f(1,1)-f(1,0),$$

因此在这种情形, 关系式 (3.7.4) 是正确的, 与前面一样, 由此得

$$\int_{\gamma_0}\omega=\int_{\gamma_1}\omega.$$

这样就证明了定理 3.7.1 的一个变形:

定理 3.7.3. *设 ω 是开集 $U\subset E$ 内的闭微分 1 形式; 如果 U 中两条环路 γ_0 及 γ_1 同伦, 我们有*

$$\int_{\gamma_0}\omega=\int_{\gamma_1}\omega.$$

注释. U 中环路之间的同伦关系是一种等价关系. 如果 ω 是 U 中的闭形式, 并且 γ 是 U 中的环路, 我们已经看到 (3.4 段末), 可能 $\int_\gamma \omega$ 不是零. 可是定理 3.7.3 说, $\int_\gamma \omega$ 的值只与环路的同伦类有关. 特别, 如果环路 γ 与一点环路同伦, 那么 $\int_\gamma \omega=0$ 对任何闭 1 形式 ω 成立.[点环路由常量映射定义].

3.8. 单连通开集

定义. 一个拓扑空间 X 如果满足下列条件, 就叫做单连通的: 1° 对于 X 中任何一对点 (x_0,x_1), 存在着起点 x_0、终点 x_1 的一条连续道路 $\gamma:[0,1]\to X$; 2° X 中任何环路与一个点环路同伦.

显然, 如果两个拓扑空间 X 及 Y 是同胚的, 并且其中一个是单连通的, 那么另一个也是单连通的.

如果应用这定义到巴拿赫空间 E 中一个开集 U, 条件 1° 表明 E 是连通的 (上编《微分学》, 第一章, 命题 3.3.5), 此外, 如果 U 满足条件 2°, 对于 U 中任何环路 γ 以及 U 中任何闭 1 形式 ω, 我们有 $\int_\gamma \omega=0$ (由定理 3.7.3). 应用定理 3.4.3 ((a) 及 (b) 等价), 我们得到:

定理 3.8.1. *设 $\omega: U\to \mathscr{L}(E;F)$ 是闭微分 1 形式. 如果 U 是单连通的, ω 在 U 中有原映射.*

单连通开集的例. 任何星形开集是单连通的. 事实上, 为了使概念明确, 假定 U 关于原点 O 是星形的; 如果 x_0 及 x_1 是 U 中两点, 由线段 $[x_0,0]$ 及线段 $[0,x_1]$ 所构成的折线有起点 x_0 及终点 x_1, 因此 U 正好满足条件 1° (事实上, 这就是说 U 是

连通的). 此外, 设 $\gamma : [0,1] \to U$ 是一环路; 令 $\delta(t,u) = u \cdot \gamma(t)$ (用纯量 $u \in [0,1]$ 乘 $\gamma(t) \in E$ 的积); 由于 U 关于 O 是星形集, $\delta(t,u) \in U$; 映射 δ 是连续的, 并且表明环路

$$t \mapsto \delta(t,1) = \gamma(t)$$

与点环路

$$t \mapsto \delta(t,0) = 0$$

同伦. 特别, 任何凸开集是单连通的 (由于它关于它的每点都是星形集).

由已作的说明, 与一个星形开集同胚的任何开集 $U \subset E$ 是单连通的.

反过来, 取 $E = \mathbb{C}, U = \mathbb{C} - \{0\}$; U 不是单连通的 (虽然它是连通的), 因为我们已知 (3.5 段末): 闭微分形式 $(1/z)$ 在 U 中没有原函数.

习题. 对于满足条件 1° 的拓扑空间 X, 下列四性质是等价的:

(a) X 是单连通的;

(b) 圆 $|z| = 1$(z 表示 $\mathbb{C}$ 中的复坐标) 在 X 中取值的任何连续映射可开拓成圆盘 $|z| \leqslant 1$ 到 X 中的连续映射;

(c) 一个正方形的边界在 X 中取值的任何连续映射可开拓成这个正方形到 X 中的连续映射.

(d) 如果 X 中两条道路有相同起点及相同终点, 那么它们是 "有固定起点及终点的同伦" 道路 (参看 3.7 段).

4. 次数 > 1 的微分形式的积分

4.1. 单位的可微分解

我们要证明下列定理:

定理 4.1.1. *设 K 是一紧子集 $\subset \mathbb{R}^n$, 并且设 $(U_i)_{i \in I}$ 是由开集 $U_i \subset \mathbb{R}^n$ 组成的 K 的有限覆盖. 那么存在着 C^∞ 类的函数*

$$f_i : \mathbb{R}^n \to [0,1] \quad (i \in I)$$

使得:

(i) $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$;

[$\operatorname{supp} f_i$ 表示函数 f_i 的 "支撑集", 即 $x \in \mathbb{R}^n$ 中满足 $f_i(x) \neq 0$ 的 x 所组成之集的附贴集; 在其中 f_i 恒等于零的所有开集中, $\operatorname{supp} f_i$ 的余集是最大的开集];

(ii) $\sum\limits_{i \in I} f_i(x) \leqslant 1$, *对任何* $x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) $\sum\limits_{i \in I} f_i(x) = 1$, *对任何* $x \in K$.

注释. 我们把条件 (ii) 及 (iii) 表述为: f_i 确定 K 上的一种 "单位的可微分解"; 条件 (i) 表述为分解 (f_i) 从属于开覆盖 (U_i).

现指出定理 4.1.1 的一种重要的特殊情形: 即集 I 只有一个元素情形.

系 4.1.2. 设 K 是一紧集 $\subset \mathbb{R}^n$, 并且设 U 是包含 K 的一个开集, 那么存在着一个函数

$$f: \mathbb{R}^n \to [0,1]$$

属于 C^∞ 类, 使得

$$\operatorname{supp} f \subset U, f(x) = 1 \quad \text{对于 } x \in K.$$

在后面定理 4.1.1 的证明中, 下列函数 (在 $\mathbb{R}^n$ 中确定, 在 [0,1] 中取值) 起着主要的作用:

$$\lambda(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) & \text{对于 } \|x\| < 1, \\ 0 \quad \text{对于 } \|x\| \geqslant 1, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

其中 $\|x\|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的欧几里得范数, 要证明函数 λ 属于 C^∞ 类: 对于 $\|x\| > 1$, 这是明显的; 对于 $\|x\| < 1$, 这也是明显的, 因为 $\|x\|^2$(x 的坐标的平方和) 是 C^∞ 类函数, 因此问题在于证明: 如果 $a \in \mathbb{R}^n$ 并且 $\|a\| = 1$, 那么 $\lambda(x)$ 在点 a 无穷可微.

我们要对整数 $k \geqslant 0$ 递推证明: 在点 a, k 阶导数存在, 并且是零: 对于 $k = 0$, 这是明显的, 因为由定义, 对于 $\|a\| = 1, \lambda(a) = 0$; 假定在点 $a, k-1$ 阶导数存在, 并且是零; 要证 $\lambda^{(k)}(a)$ 存在, 并且是零, 就是要证当 x 趋近于 a 时,

$$\|\lambda^{(k-1)}(x)\| = o(\|x - a\|) \tag{4.1.2}$$

[由于 $\lambda^{(k-1)}(a) = 0$]. 然而关系式 (4.1.2) 对于 $\|x\| \geqslant 1$ 是明显的, 因为这时 $\lambda^{(k-1)}(x) = 0$: 事实上, 它对 $\|x\| > 1$ 正确, 因为由 (4.1.1), $\lambda(x)$ 对于 $\|x\| > 1$, 恒等于零; 而由递推假设, 它对 $\|x\| = 1$ 也正确. 因此现在只要证明: 当 x 趋近于 a, 而且 $\|x\| < 1$ 时, (4.1.2) 正确. 在这种情形下, 至少在理论上, 对于关系式 (4.1.1) 中上一行所给出的函数 λ, 可以计算它的逐阶导数. 作为习题, 请读者按 k 递推证明: 对于 $\|x\| < 1$,

$$\lambda^{(k-1)}(x) \in \mathscr{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

有范数

$$\|\lambda^{(k-1)}(x)\| \leqslant \frac{m_k}{(1 - \|x\|^2)^{2k-2}} \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right),$$

其中 m_k 是与 x 无关的数; 由此得

$$\|\lambda^{(k-1)}(x)\| = o(1 - \|x\|^2).$$

然而 $1 - \|x\|^2 = \|a\|^2 - \|x\|^2 \leqslant 2(\|a\| - \|x\|) \leqslant 2\|x - a\|$, 由此最后得到 (4.1.2). 证完.

因此公式 (4.1.1) 正好确定了在任何点 $x \in \mathbb{R}^n$ 无穷可微一个函数. 在开圆盘 $\|x\| < 1$ 中任何点, 我们有 $\lambda(x) > 0$; 因此在整个闭圆盘 $\|x\| \leqslant r(r < 1)$ 中, $\lambda(x)$ 有一下确界 $m(r) > 0$; 事实上, 我们有

$$m(r) = \exp\left(\frac{1}{r^2 - 1}\right). \tag{4.1.3}$$

现设任意一点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 及一数 $r > 0$; 函数

$$x \mapsto \lambda\left(\frac{x - x_0}{r}\right)$$

在球 $\|x - x_0\| \leqslant r$ 外是零, 并且在这球内部是严格正的. 这函数属于 C^∞ 类.

有了这工具, 我们要证明几个引理, 并由此作出定理 4.1.1 的证明.

引理 1. 存在着 C^∞ 类函数

$$\mu : \mathbb{R}^+ \to [0, 1],$$

具有下列性质:

$$\mu(0) = 0, \quad \mu(t) = 1 \quad 对于\ t \geqslant 1.$$

($\mathbb{R}^+$ 表示半直线 $t \geqslant 0$).

证. 只须取

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 - \exp(t^2/(t^2 - 1)) & 对于\ t < 1, \\ 1 & 对于\ t \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

这函数正好属于 C^∞ 类, 因为

$$\mu(t) = 1 - e \cdot \lambda(t).$$

引理 2. 与定理 4.1.1 的叙述中一样, 已给紧集 K 及 K 的一个开覆盖 $(U_i)_{i \in I}$, 那么存在着 C^∞ 类函数

$$g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+,$$

使得

(a) $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$,

(b) $\sum\limits_{i \in I} g_i(x) \geqslant 1$ 对于任何 $x \in K$.

引理 2 的证明. 对于每个 $x \in K$, 连带取指标 $i = i(x) \in I$, 使 $x \in U_i$. 设 $r(x) > 0$ 使心为 x、半径为 $r(x)$ 的闭球包含在 U_i 内; 由于当 x 取遍 K 中的点时, 诸开球 $B\left(x, \dfrac{1}{2}r(x)\right)$ 覆盖紧集 K, 我们可用有限个这样的球覆盖 K. 设 x_α 是这有限个球的心 (α 取遍一个有限集 A 中的点), 并且令 $r(x_\alpha) = r_\alpha$. 于是

1° 诸开球 $B\left(x_\alpha, \frac{1}{2}r_\alpha\right)$ 覆盖 K;

2° 每个心为 x_α、半径为 r_α 的闭球包含在开集 $U_{i(x_\alpha)}$ 内. 设 λ_α 是函数

$$x \mapsto \frac{1}{m(1/2)}\lambda\left(\frac{x-x_\alpha}{r_\alpha}\right);$$

它属于 C^∞ 类, 在 $\mathbb{R}^+$ 中取值; 它的支撑集包含在 $U_{i(x_\alpha)}$ 内, 并且在开球 $B\left(x_\alpha, \frac{1}{2}r_\alpha\right)$ 内, 它是 $\geqslant 1$ 的. 因此对于任何点 $x \in K$, 至少有一指标 α, 使得 $\lambda_\alpha(x) \geqslant 1$; 更可得到: 和式

$$\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha(x)$$

是在 K 中任何点都 $\geqslant 1$ 的一个函数. 对于每个 $i \in I$, 设 A_i 是 $\alpha \in A$ 中满足 $i(x_\alpha) = i$ 的所有 α 组成的集, 并且当取 i 遍 I 中的点时, A_i 形成 A 的一种分解. 对于 $x \in \mathbb{R}^n$, 令

$$g_i(x) = \sum_{\alpha\in A_i}\lambda_\alpha(x). \tag{4.1.5}$$

g_i 的支撑集显然包含在一些函数 $\lambda_\alpha(\alpha \in A_i)$ 的支撑集的并集内, 并且由于这些支撑集中每一个都包含在 U_i 内, 我们有

$$\operatorname{supp} g_i \subset U_i.$$

而且在任何点 $x \in K$, $\sum_{i\in I} g_i(x) = \sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha(x)$ 是 $\geqslant 1$ 的. 引理 2 得证.

最后可证明定理 4.1.1. 先从证明系 4.1.2 开始: 如同在这系的叙述中一样, 给出 K 及 U, 应用引理 2 (取 I 为只含一个元素的集), 得一个 C^∞ 类的函数

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+,$$

使它满足

$$\operatorname{supp} g \subset U, g(x) \geqslant 1 \quad 对于\ x \in K.$$

然后应用引理 1 中的函数 μ, 并且令

$$f = \mu \circ g : \mathbb{R}^n \to [0,1],$$

显然 f 满足系 4.1.2 的叙述中的条件, 于是这一系得证.

现证明定理 4.1.1 的一般情形, 把引理 2 中的函数 g_i 与开覆盖 $(U_i)_{i\in I}$相联系, 并且令

$$g(x) = \sum_{i\in I} g_i(x).$$

设 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $g(x)>0$ 的 x 构成的集是 U;U 包含 K, 并且 U 是开集 (由于 g 是连续的). 由系 4.1.2 (已证明), 存在着一个 C^∞ 类函数

$$f:\mathbb{R}^n \to [0,1]$$

满足

$$\operatorname{supp} f \subset U, \quad f(x)=1 \quad 对于\ x\in K.$$

对于每个 $i\in I$, 令:

$$f_i(x)=\begin{cases}\dfrac{g_i(x)}{g(x)}f(x) & 对于\ x\in U,\\ 0 & 对于\ x\notin U.\end{cases} \tag{4.1.6}$$

由于对 $x\in U, g(x)\neq 0$, 上列定义是有意义的. 余下只要证明函数 f_i 属于 C^∞ 类, 并且满足定理 4.1.1 叙述中的 (i), (ii) 及 (iii). 然而在一点 $x_0\in U$ 的邻域内, f_i 是两个 C^∞ 类函数的商 (分母 >0), 因此 f_i 属于 C^∞ 类; 在一点 $x_0\notin U$ 的邻域中, f_i 恒等于零, 因为 $x_0\notin \operatorname{supp} f$, 从而 f 在 x_0 的一个邻域中恒等于零, 并且由此 $f_i(x)$ 恒等于零 (无论 x 在 U 中与否).

于是 f_i 在任何点 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 的邻域中属于 C^∞ 类. 它的值 $f_i(x)$ 在任何点 $x\in\mathbb{R}^n$ 显然 $\geqslant 0$. 因为 $\operatorname{supp} f_i\subset \operatorname{supp} g_i$, 性质 (i) 是正确的. 因为对于 $x\in U$, 既然 $\sum\limits_{i\in I} g_i(x)=g(x)$, 我们有

$$\sum_{i\in I} f_i(x)=f(x),$$

性质 (ii) 是明显的. 最后, 如果 $x\in K, f(x)=1$, 这就证明了 (iii).

定理 4.1.1 完全得证.

4.2. 平面 $\mathbb{R}^2$ 中带边界的紧集

用 x 及 y 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的坐标.

定义. 如果紧集 $L\subset\mathbb{R}^2$ 满足下列条件, L 就叫做一条 C^1 类曲线: 每一点 $(x_0,y_0)\in L$ 有一开邻域 U, 使得集 $L\bigcap U$, 即 L 在 U 中的点组成的集可以或者由形如

$$y=\varphi(x)$$

的方程确定 [其中 φ 是 C^1 类函数, 且满足 $\varphi(x_0)=y_0$], 或者由形如

$$x=\psi(y)$$

的方程确定 [其中 ψ 是 C^1 类函数, 且满足 $\psi(y_0)=x_0$]

习题. 证明下列说法与上述相同: 存在着一条 C^1 类道路 (参看 3.1 段)

$$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2,$$

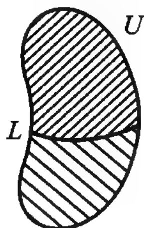
使得对于 $t\in[a,b]$, 导数 $\gamma'(t)\neq 0$, 使得 (x_0,y_0) 是一个 $t_0\in]a,b[$ 的像 $\gamma(t_0)$, 还使得有一开集 $U\ni(x_0,y_0)$, 使在 U 中 γ 的像上的点构成的集与 $L\bigcap U$ 重合.

两种定义的等价性由隐函数定理容易推出. 注意条件 $\gamma'(t_0)\neq 0$ 蕴含着: 对于与 t_0 充分接近的 t, 映射 γ 是单射.

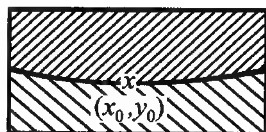
命题 4.2.1. *设 $L\subset\mathbb{R}^2$ 是一条 C^1 类曲线. 在 L 上每点的邻域内, L 把平面分成两个区域.*

这一叙述明确指出: 可选取含 (x_0,y_0) 的一个开域 $V\subset U$, 使得它是连通的, 并且 $V-V\bigcap L$ *有两个连通的合成子集*. 为了看出此点, 例如假定在 (x_0,y_0) 的一个邻域内, L 由方程 $y=\varphi(x)$ 确定; 选取 $\varepsilon>0$ 及 $\eta>0$ 充分小, 使得

1° 开矩形 $|x-x_0|<\varepsilon, |y-y_0|<\eta$ 包含在 U 内;



2° $|\varphi(x)-y_0|<\eta$ 对于满足 $|x-x_0|<\varepsilon$ 的任何 x 成立. 如果用 V 表示这个开矩形, V 是连通的; $V-V\bigcap L$ 有两个连通的合成子集, 即点 $(x,y)\in V$ 中满足 $y<\varphi(x)$ 的点构成的集, 以及点 $(x,y)\in V$ 中满足 $y>\varphi(x)$ 的点构成的集.



定义. 如果紧集 $L\subset\mathbb{R}^2$ 满足下列条件, 就叫做一条*分段 C^1 类曲线*: 每一点 $(x_0,y_0)\in L$ 有一开邻域 U, 使得集 $L\bigcap U$ 与 U 中一条分段 C^1 类道路 (参看 3.1 段)

$$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$$

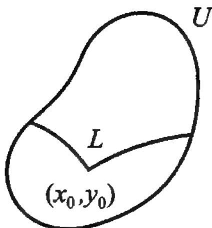
上的点构成的集相重合, 而且 γ 具有下列性质: 映射 γ 是单射, 并且在 $[a,b]$ 中, 使 γ 属于 C^1 类的每个 (闭) 子区间上, 导数 $\gamma'(t)\neq 0$.

在一些点 $(x_0,y_0)\in L$ 中, 如果在它们的邻域内, L 不属于 C^1 类, 这些点就叫做 L 的*角点*; 角点是*孤立的*; 由于 L 是紧集, 角点的个数是有限的. L 上的点中, 除去角点以外, 都叫做 L 的*正则点*. 说 L 是 C^1 类曲线, 就是说 L 上的点都是正则点.

定义. 如果一个紧子集 $K\in\mathbb{R}^2$ 具有下列性质, 它就叫做*带边界的紧集*:

(a) K 的边界点的集 ∂K 是一条分段 C^1 类曲线:

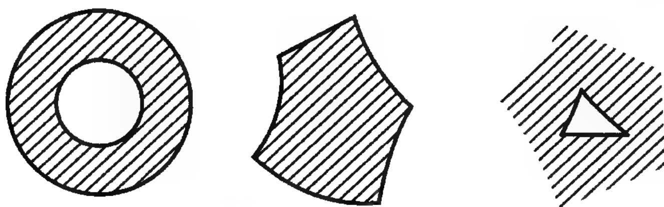
(b) 对于任何正则点 $(x_0,y_0)\in\partial K$, 存在着 (x_0,y_0) 的一个连通开邻域 V, 使得 $V-V\bigcap(\partial K)$ 有两个连通合成子集, 一个由 K 的内点组成, 另一个由 K 的余集中的点组成.



简单地说, 条件 (b) 表明在 K 的任何正则边界点的邻域中, K 中的点在边界 ∂K 的一边, 余集 $\complement K$ 中的点在边界 ∂K 的另一边.

注意. 边界 ∂K 不一定是连通的, 即令 K 是连通的.

带边界的紧集的例:



K 的边界的定向　在边界 ∂K 上任何正则点的邻域内, ∂K 与一条 C^1 类道路的像重合. 然而一条道路可以用两种不同的方式定向 (参看 3.3 段): 我们记得每种取参变量法有一种定向; 考虑两种不同的取参变量法, 如果参变量的代换由一个严格增函数确定, 那么两种方法有同一定向; 如果由一个严格减函数确定, 就确定相反定向. 然而条件 (b) 告诉我们, 在 ∂K 上每个正则点的邻域内, K 在 ∂K 的一边. 选取 ∂K 的定向 (即通过的方向), 使得当我们通过 ∂K 时, K 在我们的*左边*. 这准确地表示: 在 t_0 附近, 取 t 作为曲线 ∂K、即 γ 的参变量; 那么曲线 ∂K 上一点 $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ 处的切向量 $\gamma'(t_0)$ 必须使与它成角 $+\frac{\pi}{2}$ 的任何向量, 指向 ∂K 的含 K 的内部的一边, 现就 ∂K 在 (x_0, y_0) 附近由下列方程

$$y = \varphi(x)$$

确定情形, 作出说明; 在 (x_0, y_0) 的邻域中, 如果 K 的内部由 $y > \varphi(x)$ 确定, 在 ∂K (在 (x_0, y_0) 的邻域内) 上, 取由增加的 x 所确定的方向 [换句话说, 可取 x 作为参变量]. 相反地, 如果 K 的内部在 $y < \varphi(x)$ 的一边, 取 $-x$ 作为参变量, 于是 ∂K 的定向是 x 减小的 x 的方向.



如果在边界上所有正则点如上进行, 可见 ∂K 是有限个定向道路的并集. 因此可确定线积分 $\int_{\partial K} \omega$, 其中 ω 是一次微分形式. 有了上述定向, ∂K 叫做紧集 K 的*定向边界*.

4.3. 微分 2 形式在带边界的紧集 K 上的积分

设 ω 是开集 $U \supset K$ 内的一个二次微分形式, 属于 C^0 类并且在一个巴拿赫空间 F 中取值:

$$\omega \in \Omega_2^{(0)}(U, F).$$

注意. 在 K 的邻域内, ω 与在整个平面 $\mathbb{R}^2$ 上确定的一个微分形式重合: 事实上, 由系 4.1.2, 存在着一个 C^∞ 类函数 $\lambda : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ (λ 更加是连续的), 它在 K 的一个紧邻域内等于 1, 而这邻域的支撑集包含在 U 内. 于是取 α 作为微分形式, 它在 U 内等于 $\lambda\omega$, 在 λ 的支撑集的余集内等于 0.

总是把 x 及 y 记作 $\mathbb{R}^2$ 中的坐标, 作为标准写法, 微分形式 ω 可写出如下:

$$\omega = f(x,y)dx \wedge dy,$$

其中 f 是连续映射 $U \to F$. 设 $\overline{f}(x,y)$ 是确定如下的映射 $\mathbb{R}^2 \to F$:

$$\begin{cases} \overline{f}(x,y) = f(x,y) & \text{对于 } (x,y) \in K, \\ \overline{f}(x,y) = 0 & \text{对于 } (x,y) \notin K. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

映射 $\overline{f}$ 有紧支撑集, 并且按勒贝格意义可积; 事实上, 任何紧集 K 的特征函数 χ_K 勒贝格可积, 因此乘积 $\chi_K f = \overline{f}$ 勒贝格可积. 实际因为 K 是带边界的紧集, 可证明 χ_K 黎曼可积, 因而 $\overline{f}$ 黎曼可积.

于是确定了关于平面面积元素 $dx \wedge dy$ 的积分

$$\iint \overline{f}(x,y)dx \wedge dy.$$

作为定义, 把这积分记作

$$\iint_K f(x,y)dx \wedge dy,$$

并且也作为定义, 这就是积分 $\displaystyle\iint_K \omega$. 这积分的值是 F 中的一个元素.

我们要提出上列积分的几个性质, 但不作证明:

(i) K 给定, 映射 $\omega \mapsto \displaystyle\iint_K \omega$ 是 $\omega \in \Omega_2^{(0)}(U,F)$ 的一个线性映射.

(ii) 如果 K' 是包含在 K 内的带边界的紧集, 并且

$$(\operatorname{supp} \omega) \bigcap K \subset K' \tag{4.3.2}$$

那么

$$\iint_K \omega = \iint_{K'} \omega. \tag{4.3.3}$$

[$\operatorname{supp} \omega$ 表示 $\omega = f dx \wedge dy$ 的支撑集, 即映射 f 的支撑集; 它是 U 中的一个闭集, 它与 K 的交集是紧集. 因为由 (4.3.1) 确定的映射 $\overline{f}$ 在 K' 上等于 f, 在 K' 以外等于 0, 所以显然由 (4.3.2) 可导出 (4.3.3).]

(iii) 积分

$$\iint \overline{f}(x,y)dx \wedge dy$$

可以接连作两次积分算出: 对于固定的 y, 先计算积分

$$\int \overline{f}(x,y)dx,$$

这积分按勒贝格意义存在; 于是得一映射 $g(y)$, 它也是勒贝格可积的, 而且它的积分 $\int g(y)dy$ 等于 $\iint \overline{f}(x,y)dx \wedge dy$; 于是得公式

$$\iint \overline{f}(x,y)dx \wedge dy = \int dy \left(\int \overline{f}(x,y)dx \right). \tag{4.3.4}$$

同样可得

$$\iint \overline{f}(x,y)dx \wedge dy = \int dx \left(\int \overline{f}(x,y)dy \right). \tag{4.3.5}$$

(iv) 如果

$$\begin{cases} x = x_0 + u\cos\theta - v\sin\theta = a(u,v), \\ y = y_0 + u\sin\theta + v\cos\theta = b(u,v) \end{cases}$$

是欧几里得直接位移 (由一个旋转及一个平移组成), 我们有

$$\iint \overline{f}(x,y)dx \wedge dy = \iint \overline{f}(a(u,v), b(u,v))du \wedge dv \tag{4.3.6}$$

把从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{R}^2$ 的映射

$$(u,v) \mapsto (a(u,v), b(u,v))$$

记作 φ, 并且把紧集 $\varphi^{-1}(K)$ 记作 K', 上列关系式可写成

$$\iint_K \omega = \iint_{K'} \varphi^*(\omega); \tag{4.3.7}$$

这关系式只是以后要证明的 "变量代换" 公式的一种特殊情形, 我们注意到: 因为雅可比行列式 $\partial(x,y)/\partial(u,v) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (旋转的行列式), 正好有

$$\varphi^*(dx \wedge dy) = du \wedge dv.$$

只要承认平面的面积元素通过直接位移不变, 性质 (iv) 的证明是容易得到的.

4.4. 平面上的斯托克斯定理

这定理的叙述如下:

定理 4.4.1. 设 $K \subset \mathbb{R}^2$ 是一个带边界的紧集, 并且设 α 是开集 $U \supset K$ 内的 C^1 类微分 1 形式, 它在 F (巴拿赫空间) 中取值. 我们有

$$\boxed{\iint_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha}, \tag{4.4.1}$$

这里线积分 $\int_{\partial K} \alpha$ 是沿紧集 K 的定向边界取的 (按照 4.2 段末所约定的定向方法).

现阐明公式 (4.4.1): 按照典范写法, 我们有

$$\alpha = P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

其中 P 及 Q 是 C^1 类映射, 在 U 中确定、在 F 中取值. 再者,

$$d\alpha = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy,$$

从而关系式 (4.4.1) 可写成

$$\boxed{\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int_{\partial K} Pdx + Qdy}. \tag{4.4.2}$$

这就是通常所谓的格林 – 黎曼公式.

在下面 4.5 段中要分几步作出这公式的证明. 在此之前, 要确定一个辅助的、技术性的概念.

定义. 设 R 是平面 $\mathbb{R}^2$ 上一个矩形 (所谓 "矩形", 指的不仅是矩形的边界, 而且是矩形内部的附贴集; 矩形是一种特殊类型的带边界的紧集). 如果 R 满足下列条件中的一个, 它就叫做 K 可取的:

(a) R 不与边界 ∂K 相交;

(b) 交集 $R\bigcap(\partial K)$ 是联接 R 的两相对顶点的一条 C^1 类曲线, 并且存在着一个旋转, 把 R 变换成边与两坐标轴相平行的矩形, 而 $R\bigcap\partial K$ 含在由

$$y = \varphi(x), \quad 且由 \quad x = \psi(y)$$



所确定的一条曲线内 (φ 及 ψ 是 C^1 类严格增函数, 互为反函数), 于是 $R\bigcap K$ 由

$$y \geqslant \varphi(x), \quad 且由 \ x \leqslant \psi(y)$$

所确定.

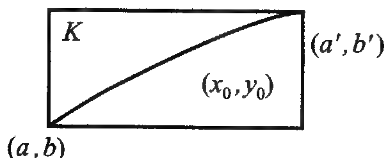
上列定义可由下列命题解释:

命题 4.4.2. 对于任何点 (x_0, y_0), 除去边界 ∂K 上的"角点"外, 存在着一个 K 可取矩形 R, 把 (x_0, y_0) 包含在它的内部.

证. 如果 $(x_0, y_0) \notin \partial K$, 这是明显的, 因为 (x_0, y_0) 是不与 ∂K 相交的一个矩形的中心. 假定 (x_0, y_0) 是边界 ∂K 的一个正则点; 在这点, 曲线 ∂K 有一定向切线 (由于 ∂K 是定向的). 可作一直接位移, 使得对于新坐标 (x, y), 这一定向切线与 x 轴成一个 > 0, 并且 $< \pi/2$ 的角. 对于新坐标, 在 (x_0, y_0) 的邻域内, ∂K 由

$$y = \varphi(x), \quad \text{且由 } x = \psi(y)$$

所确定, 这里 φ 及 ψ 属于 C^1 类, 并且 $\varphi'(x_0) > 0, \psi'(y_0) > 0$; 如果在 ∂K 上, (x_0, y_0) 的两侧取充分接近的两点 (a, b) 及 (a', b'), 使以 $(a, b), (a, b'), (a', b)$ 及 (a', b') 各点为顶点的矩形 R 满足前面的条件 (b); 因此 R 是 K 可取的. 证完.



4.5. 定理 4.4.1 (斯托克斯定理) 的证明

第一步: 1 形式 α 的支撑集包含在一个 K 可取矩形 R 中情形.

总可假定在整个平面中形式 α 确定并且属于 C^1 类; 否则, 可像在 4.3 段开始时那样进行. 由重积分的性质 (iv) (4.3 段), 可假定 R 的边与坐标轴平行. 如果 R 不与边界 ∂K 相交 (情形 (a)), 形式 α 在边界 ∂K 的邻域内恒等于零, 从而积分 $\int_{\partial K} \alpha$ 是零. 还要证明我们也有 $\iint_K d\alpha = 0$, 这样就证明了 (4.4.1). 事实上, 要证明两个关系式:

$$\iint_K \frac{\partial \theta}{\partial x} dx \wedge dy = 0, \quad \iint_K \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy = 0.$$

例如证明第一个关系式. 由 (4.3.3), 我们有

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \iint_{K \cap R} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy,$$

这是由于 Q 的支撑集包含在 R 中; 包含在 $\operatorname{supp} Q$ 中的 $\partial Q / \partial x$ 的支撑集更加是包含在 R 中. 由 (4.3.4), 我们有

$$\iint_{K \cap R} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \int_b^{b'} dy \left(\int_a^{a'} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right).$$

然而由于 Q 的支撑集与 R 的边界不相交, 可见

$$\int_a^{a'} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(a', y) - Q(a, y) = 0.$$

证完.

现假定 K 可取矩形 R (由假设, R 的内部包含 α 的系数 P 及 Q 的支撑集) 满足 4.4 段中的条件 (b). 与前面一样, 可以假定 R 有与坐标轴平行的边. 要证明下列每一个关系式:

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \int_{\partial K} Q dy, \tag{4.5.1}$$

$$-\iint_K \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy = \int_{\partial K} P dx, \tag{4.5.2}$$

例如证明第一个关系式. 根据对 Q 的支撑集所作假设, 只须证明

$$\iint_{K \bigcap R} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \int_{(\partial K) \bigcap R} Q dy.$$

由 (4.3.3), 并且用 (b) 中的记号, 我们有

$$\iint_{K \bigcap R} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \int_b^{b'} dy \left(\int_a^{\psi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx \right).$$

然而 Q 在 R 的边界上是零, 于是得

$$\int_a^{\psi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(\psi(y), y) - Q(a, y) = Q(\psi(y), y).$$

因此

$$\iint_{K \bigcap R} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \int_b^{b'} Q(\psi(y), y) dy,$$

并且上式右边就是下列曲线积分的值:

$$\int_{(\partial k) \bigcap R} Q dy$$

[取 y 作为从 b 增加到 b' 的参变量]. (4.5.1) 得证.

同样,

$$\begin{aligned}
-\iint_K \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy &= -\iint_{K \bigcap R} \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy \\
&= -\int_a^{a'} dx \int_{\varphi(x)}^{b'} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\
&= \int_a^{a'} P(x, \varphi(x)) dx,
\end{aligned}$$

并且上列最后一积分等于曲线积分

$$\int_{(\partial K)\bigcap R} P dx,$$

第二步: 在 1 形式 α 的支撑集不含边界 ∂K 的任何角点 (共有有限个) 情形, 要证明 (4.4.1).

总可假定 $\operatorname{supp}(\alpha)$ 是一紧集 (可能将 α 乘以一个 C^∞ 类数值函数, 这函数有紧支撑集, 在 K 的一个邻域中等于 1). 由命题 4.4.2, 紧 $\operatorname{supp}(\alpha)$ 的每点在一个 K 可取矩形内部. 根据紧性, 可用有限族 $(U_i)_{i\in I}$ 覆盖 $\operatorname{supp}(\alpha)$, 这里每个开集 U_i 在一个 K 可取矩形内部. 这些 U_i 甚至覆盖 $\operatorname{supp}(\alpha)$ 的一个紧邻域 K', 由定理 4.1.1, 在 K' 上存在着从属于覆盖 U_i 的一种单位可微分解 $(f_i)_{i\in I}$. 显然

$$\alpha = \sum_{i\in I}(f_i\alpha).$$

然而 $f_i\alpha$ 的支撑集包含在一个可取矩形的内部. 因此可应用刚在"第一步"中证明了的结果, 我们有

$$\iint_K d(f_i\alpha) = \int_{\partial K} f_i\alpha.$$

关于指标 $i\in I$ 作加法, 就得到关系式 (4.4.1).

第三即最后一步: 一般情形. 与前面一样, 应用一种单位的微分分解, 可以把问题化到在 α 的支撑集只含边界 ∂K 的一个角点情形, 证明斯托克斯公式 (4.4.1). 设 $z_0 = (x_0, y_0)$ 是这一角点. 我们要把形式 α 乘以在 z_0 的邻域中为零的一个数值函数, 使得把问题化到第二步情形. 确切地说, 存在着一个 C^∞ 类函数

$$\nu : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$$

具有下列性质:

$$\begin{aligned} \nu(z) = 0 \quad & 对于\ \|z\| \leqslant \frac{1}{2}, \\ \nu(z) = 1 \quad & 对于\ \|z\| \geqslant 1 \end{aligned}$$

(这里用的是欧几里得范数). 事实上, 这是从系 4.1.2 可立即得到的结果. 对于每个 $r > 0$, 令

$$\nu_r(z) = \nu\left(\frac{z - z_0}{r}\right).$$

那么 1 形式 $\nu_r\alpha$ 在圆盘 $\|z - z_0\| < r$ 之外与 α 相同, 在圆盘 $\|z - z_0\| \leqslant r/2$ 中恒等于零.

由第二步中所已证明的结果, 我们有

$$\iint_K d(\nu_r\alpha) = \int_{\partial K} \nu_r\alpha. \tag{4.5.3}$$

如果我们证明

$$\int_{\partial K} \alpha = \lim_{r \to 0} \int_{\partial K} \nu_r \alpha \tag{4.5.4}$$

及

$$\iint_K d\alpha = \lim_{r \to 0} d(\nu_r \alpha) \tag{4.5.5}$$

从 (4.5.3) 出发取极限, 就得到关系式 (4.4.1). 因此简单地还只要证明 (4.5.4) 及 (4.5.5).

我们有

$$\int_{\partial K} \nu_r \alpha = \int_{\partial K} (\nu_r P)dx + (\nu_r Q)dy;$$

在每点 $(x,y) \neq (x_0,y_0)$, 显然有

$$\begin{cases} \lim\limits_{r \to 0} \nu_r(x,y)P(x,y) = P(x,y), \\ \lim\limits_{r \to 0} \nu_r(x,y)Q(x,y) = Q(x,y), \end{cases} \tag{4.5.6}$$

而且映射 $|\nu_r P|$ 及 $|\nu_r Q|$ 不超过一个固定的数. 于是勒贝格 ($\int$ 号下取极限) 定理表明: 由 (4.5.6) 可导出 (4.5.4). 根据类似的理由, 我们有

$$\iint_K d\alpha = \lim_{r \to 0} \iint_K \nu_r (d\alpha).$$

然而

$$d(\nu_r \alpha) = (d\nu_r) \wedge \alpha + \nu_r (d\alpha).$$

因此如果我们证明了

$$\lim_{r \to 0} \iint_K (d\nu_r) \wedge \alpha = 0, \tag{4.5.7}$$

那么关系式 (4.5.5) 就证明了. 我们有

$$(d\nu_r) \wedge \alpha = \left(Q\frac{\partial \nu_r}{\partial x} - P\frac{\partial \nu_r}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

设 M 是 $\|P(x,y)\|$ 及 $\|Q(x,y)\|$ 在 K 上的一个上界, m_r 是 $\|\partial \nu_r/\partial x\|$ 及 $\|\partial \nu_r/\partial y\|$ 在 K 上的一个上界. 由于 ν_r 在圆盘 $\|z - z_0\| \leqslant r$ 外是常量, 事实上我们有

$$\iint_K (d\nu_r) \wedge \alpha = \iint_{\|z-z_0\| \leqslant r} \left(Q\frac{\partial \nu_r}{\partial x} - P\frac{\partial \nu_r}{\partial y} \right) dx \wedge dy;$$

由于半径是 r 的圆盘的面积是 πr^2, 上列重积分的范数不超过

$$M \cdot m \cdot (\pi r^2).$$

余下只要估计 m_r: 导出映射 $\partial\nu/\partial x$ 及 $\partial\nu/\partial y$ 是有紧支撑集的连续映射, 因此存在着 $m>0$, 使得我们有: 在任何点 $z\in\mathbb{R}^2$,

$$\left\|\frac{\partial\nu}{\partial x}\right\|\leqslant m,\quad \left\|\frac{\partial\nu}{\partial y}\right\|\leqslant m.$$

由于 $\nu_r(z)=\nu((z-z_0)/r)$, 我们有

$$\frac{\partial\nu_r}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial\nu}{\partial x},\quad \frac{\partial\nu_r}{\partial y}=\frac{1}{r}\frac{\partial\nu}{\partial y},$$

因此可以取

$$m_r=\frac{m}{r}.$$

最后得

$$\left\|\iint_K(d\nu_r)\wedge\alpha\right\|\leqslant\pi Mmr,$$

这就证明了 (4.5.7). 定理 4.4.1 最后证完.

4.6. 重积分中的变量代换

设 K 是平面 $\mathbb{R}^2$ 中带边界的紧集, 它的边界 ∂K 属于分段 C^1 类 (参看 4.2 段). 设 φ 是从包含 K 的一个开集 U 到一个开集 $U'\subset\mathbb{R}^2$ 上的 C^1 微分同胚, 那么 $K'=\varphi(K)$ 是一个带边界的紧集, 它的边界属于分段 C^1 类: 由定义, 这是明显的.

既然 φ 是 C^1 微分同胚, 切线性映射 $\varphi'(z)$ (对于 $z\in U$) 是一同构 $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$; 因此对于任何 $z\in U$, 它的行列式 $\neq 0$. 我们记得这行列式叫做变换 φ 的雅可比行列式, 它是

$$\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)},$$

这里 $\varphi(x,y)$ 是坐标为 x 及 y 的点 z 通过 φ 变换而得, 并且把 $\varphi(x,y)$ 的坐标记作 x' 及 y'. 这雅可比列行式的符号局部保持不变; 因此如果 U 是连通的 (为了简化, 我们此后这样假定), C^1 微分同胚 φ 的雅可比行列式有不变的符号.

定义. 如果雅可比行列式 $\varphi>0$, 就说 φ 保持定向; 如果雅可比行列式 <0, 就说 φ 改变定向.

我们要证明变量代换公式:

定理 4.6.1. 用前面的假设和记号, 设 ω 是开集 U' 内的 C^0 类微分 2 形式; 那么我们有

$$\iint_{\varphi(K)}\omega=\varepsilon\iint_K\varphi^*(\omega),\tag{4.6.1}$$

这里 $\varepsilon=+1$, 如果 φ 保持定向; $\varepsilon=-1$, 如果 φ 改变定向.

现阐明关系式 (4.6.1): 按照典范写法, 我们有

$$\omega = f(x', y')dx' \wedge dy',$$

其中 x' 及 y' 是开集 $U' = \varphi(U)$ 中一点的坐标; f 在 U' 中连续. 于是

$$\varphi^*(\omega) = f(x'(x,y), y'(x,y))\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}dx \wedge dy,$$

其中 $x'(x,y), y'(x,y)$ 是确定 C^1 微分同胚 φ 的函数. 考虑到 (4.6.1) 中 $\varepsilon = \pm 1$ 的值, 于是关系式 (4.6.1) 可写成

$$\iint_{\varphi(K)} f(x',y')dx' \wedge dy' = \iint_K f(x'(x,y), y'(x,y))\left|\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}\right| dx \wedge dy. \tag{4.6.2}$$

这就是必须证明的关系式.

然而由定义,

$$\iint_{\varphi(K)} f(x',y')dx' \wedge dy'$$

等于在整个平面上的积分

$$\iint \overline{f}(x',y')dx' \wedge dy',$$

这里 $\overline{f}$ 表示在 $\varphi(K)$ 上等于 f, 在 $\varphi(K)$ 以外等于 0 的映射. $\overline{f}$ 的支撑集包含在开集 $\varphi(U)$ 内, 因而映射 $\overline{f} \circ \varphi$ 是确定的 (在 U 内等于 $\overline{f} \circ \varphi$, 在他处等于 0). 要证明的 (4.6.2) 式于是可写成

$$\iint \overline{f}dx' \wedge dy' = \iint \overline{f} \circ \varphi \left|\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}\right| dx \wedge dy,$$

积分是在整个平面 $\mathbb{R}^2$ 上取的.

因此定理 4.6.1 只是下列定理 (在它的叙述中, 我们写出 f 来代替 $\overline{f}$) 的一种特殊情形:

定理 4.6.2. *φ 总是表示从一开集 $U \subset \mathbb{R}^2$ 到一开集 $U' \subset \mathbb{R}^2$ 上的一个 C^1 微分同胚, 设 f 是一个勒贝格可积函数, 有包含在 U' 内的紧支撑集. 那么我们有*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f dx' \wedge dy' = \iint_{\mathbb{R}^2} f \circ \varphi \left|\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}\right| dx \wedge dy. \tag{4.6.3}$$

[$\partial(x',y')/\partial(x,y)$ 只是在 U 中确定这一事实并不重要, 因为函数 $f \circ \varphi$ 的支撑集包含在 U 内.]

证. (a) 我们要首先证明: 当 f 属于 C^1 类, 并且 φ 是从一个开集 U 到一个开集 U' 上的 C^2 微分同胚时, (4.6.3) 成立, 这里 U' 包含 f 的紧支撑集. 存在着带边界

的紧集 K' 包含 $\operatorname{supp} f$, 并且被包含在 U 内: 把 $\mathbb{R}^2$ 分成充分小的方格 (小到使得任何与 $\operatorname{supp} f$ 相交的方格包含在 U 内), 就可看出这一点. 于是只须取所有与 $\operatorname{supp} f$ 相交的方格的并集作为 K'. 设 $K=\varphi^{-1}(K')$; 我们有

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f dx' \wedge dy' = \iint_{K'} \omega, \quad \text{其中 } \omega = f dx' \wedge dy',$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f\circ\varphi \left|\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}\right| dx\wedge dy = \varepsilon \iint_K \varphi^*(\omega).$$

于是要证明的关系式 (4.6.3) 可写成 (4.6.1) 形式. 因此我们要在 ω 属于 C^1 类, 而且 φ 是 C^2 微分同胚情形下, 证明 (4.6.1).

既然 ω 属于 C^1 类, $d\omega$ 存在; 既然 $d\omega$ 是三次的, 并且 $\mathbb{R}^2$ 有 2 维, 我们又有 $d\omega=0$. 于是可对 ω 应用庞加莱定理 (定理 2.12.1), 这是因为平面 $\mathbb{R}^2$ 关于原点是星形域; 因此在 $\mathbb{R}^2$ 中存在着一个 C^1 类微分 1 形式 α, 使得 $d\alpha=\omega$. 于是由斯托克斯定理 (定理 4.4.1), 我们有

$$\iint_{\varphi(K)} \omega = \iint_{\varphi(K)} d\alpha = \int_{\partial\varphi(K)} \alpha. \tag{4.6.4}$$

然而已知对于曲线积分的变量代换公式 (参看 3.3 段); 在这里, 边界 $\partial\varphi(K)$ 是边界 ∂K 由 φ 映射出的像; 但是必须注意从 ∂K 到 $\partial\varphi(K)$ 上的映射 φ 是保持、还是改变这两边界的定向. 如果 $\varphi: U\to U'$ 保持定向 (这就是说, 如果 φ 的雅可比行列式 >0), 那么 φ 把定向边界 ∂K 变换成定向边界 $\partial\varphi(K)$; 相反地, 如果 φ 改变定向, 那么 φ 把定向边界 ∂K 变换成具有反向的边界 $\partial\varphi(K)$. 这可由边界 ∂K 定向的定义导出.

由此得

$$\int_{\partial\varphi(K)} \alpha = \varepsilon\int_{\partial K} \varphi^*(\alpha) = \varepsilon\int_{\partial K} \varphi^*(d\omega); \tag{4.6.5}$$

然而因为 φ 属于 C^2 类,$\varphi^*(\omega)$ 属于 C^1 类, 我们有 (定理 2.9.2) $\varphi^*(d\omega)=d(\varphi^*(\omega))$, 因此 $d(\varphi^*(\omega))$ 有意义. 于是由 (4.6.5),

$$\int_{\partial\varphi(K)} \alpha = \varepsilon\int_{\partial K} d(\varphi^*(\omega)),$$

再应用斯托克斯定理, 就得到

$$\int_{\partial\varphi(K)} \alpha = \varepsilon\iint_K \varphi^*(\omega); \tag{4.6.6}$$

上式连同 (4.6.4) 给出了要证明的关系式 (4.6.1).

(b) 我们刚在 f 属于 C^1 类, 而且 φ 是 C^2 微分同胚这一特殊情形下, 证明了定理 4.6.2. 性急的读者可能承认在更一般的假设下, 定理正确. 对于求知欲强的读者,

现要给出一般情形的证明. 为此, 我们要用 4.1 段中确定的 C^∞ 类函数 λ; 准确地说, 考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 λ:

$$\lambda(x,y)=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{1}{x^2+y^2-1}\right) & \text{对于 } x^2+y^2<1,\\ 0 & \text{对于 } x^2+y^2\geqslant 1.\end{cases}$$

对于每个 $r>0$, 设 $\lambda_r(x,y)=\lambda(x/r,y/r)$ 是支撑集包含在圆盘 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 中的函数; 存在着一个常数 $c_r>0$, 使得

$$\iint c_r\lambda_r(x,y)dx\wedge dy=1;$$

令 $c_r\lambda_r=\mu_r$. 对于可积并且有紧支撑集的任何映射 f, 我们要用卷积 μ_r*f: 这是由

$$(\mu_r*f)(x,y)=\iint f(x-u,y-v)\mu_r(u,v)du\wedge dv$$

确定的映射, 是有紧支撑集的可积映射, 是 f 经过一些平移后的平均值, 这些平移 (u,v) 满足 $u^2+v^2\leqslant r^2$. 因此如果 r 较小, μ_r*f 在一种确切的意义下与 f 邻近: 例如, 如果 f 连续 (从而一致连续), 那么当 r 趋近于 0 时, μ_r*f 一致收敛于 f. 在勒贝格积分论中, 我们证明在空间 L^1 中范数的意义下, μ_r*f 收敛于 f: 这就是说,

$$\iint\|f(x,y)-(\mu_r*f)(x,y)\|dx\wedge dy$$

随着 r 趋近于 0; 由此得

$$\iint f(x,y)dx\wedge dy=\lim_{r\to 0}\iint(\mu_r*f)(x,y)dx\wedge dy. \tag{4.6.7}$$

另一方面, 如同函数 μ_r, 映射 μ_r*f 属于 C^∞ 类; 事实上, 我们也有

$$(\mu_r*f)(x,y)=\iint \mu_r(x-u,y-v)f(u,v)du\wedge dv,$$

并且积分号下微分法 (在勒贝格积分论中) 表明 μ_r*f 有导出映射

$$(\mu_r*f)'=\mu_r'*f;$$

换句话说,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu_r*f)=\frac{\partial\mu_r}{\partial x}*f.$$

我们能继续下去, 并且求得 μ_r*f 的逐阶导出映射.

我们也要用卷积 $\mu_r*\varphi$, 它是一个 C^∞ 类映射; 如果它不是确定在整个开集 U 内, 至少在开集 U_r 内, 而 U_r 是由满足下列条件的点 (x,y) 组成的: 心为 (x,y)、半

径为 r 的闭圆盘包含在 U 内. 在 U_r 内, 映射 $\mu_r * \varphi: U_r \to \mathbb{R}^2$ 属于 C^∞ 类, 并且特别属于 C^2 类. 易于证明

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu_r * \varphi) = \mu_r * \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu_r * \varphi) = \mu_r * \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

因此映射 $\mu_r * \varphi = \varphi_r$ 以及它的偏导出映射分别一致收敛于 $\varphi, \partial\varphi/\partial x$ 及 $\partial\varphi/\partial y$. 由此可得, 在包含在 U 内的任何紧集上, 对于充分小的 r, φ_r 是确定的, 并且属于 C^1 类, 而在这紧集中任何点, φ_r 的雅可比行列式有 φ 的雅可比行列式的符号. 用略为巧妙一点的推理可以证明: 包含在 U 内的任何紧集有一开邻域 $V \subset U$, 使得 (对于充分小的 r)φ_r 是从 V 到它的像 $\varphi_r(V)$ 上的一个 C^2 微分同胚, 并且 $\varphi_r(V)$ 包含映射 $\lambda_r * f$ 的支撑集. 因此对于充分小的 r, 能应用已证明的 (a) 部分, 得:

$$\iint (\mu_r * f) dx' \wedge dy' = \iint (\mu_r * f) \circ \varphi_r |J(\varphi_r)| dx \wedge dy, \tag{4.6.8}$$

其中 $J(\varphi_r)$ 表示变换 φ_r 的雅可比行列式. 最后, 应用关于 $\iint$ 下取极限的勒贝格定理: 这里不作出详细论证. 于是当 r 趋近于 0 时, (4.6.8) 的左边趋近于 (4.6.3) 的左边, 并且 (4.6.8) 的右边趋近于 (4.6.3) 的右边. 这就证明了 (4.6.3). 证完.

4.7. 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的流形

命题 4.7.1. 设已给两整数 $k \geqslant 1$ 及 $p \geqslant 1$. 设已给一个子集 $M \subset \mathbb{R}^n$ 及坐标为 $a_1, \cdots, a_n$ 的一点 $a \in M$, 下列三性质是等价的:

(i) 存在着 a 的一个开邻域 V 及从 V 到开集 $W \subset \mathbb{R}^n$ 上的一个 C^k 微分同胚 f, 使得 $f(a) = 0$, 并且 $f(M \bigcap V)$ 是 W 与由方程 $y_{p+1} = 0, \cdots, y_n = 0$ 所确定的 p 维平面的交集 (把 W 中一点的坐标记作 y_i);

(ii) 在把周围空间 $\mathbb{R}^n (\supset M)$ 中的坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 适当排列后, 在点 $(a_1, \cdots, a_p)$ 的一个邻域内, 存在着 $n-p$ 个 C^k 类数值函数 $\varphi_{p+1}(x_1, \cdots, x_p), \cdots, \varphi_n(x_1, \cdots, x_p)$, 使得 $\varphi_i(a_1, \cdots, a_p) = a_i (p+1 \leqslant i \leqslant n)$, 并且 a 的一个充分小的邻域 V 中的点 M, 正好是坐标 $x_1, \cdots, x_n$ 满足下列关系式的点:

$$x_i = \varphi_i(x_1, \cdots, x_p) \quad 对于\ p+1 \leqslant i \leqslant n;$$

(iii) 存在着 a 的一个开邻域 V 在 $\mathbb{R}^n$ 内,O 的一个开邻域 Ω 在 $\mathbb{R}^p$ 内, 以及从 Ω 到 $M \bigcap V$ 的一个同胚 g, 使得 g(看作在 $\mathbb{R}^n$ 中取值的映射) 属于 C^k 类, $g(0) = a$, 并且 $g'(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$ 有秩 p.

证. 首先说明一个名词问题: 当一个映射 $g: \Omega \to \mathbb{R}^n$ 属于 C^1 类, 并且使得对于一点 $t \in \Omega, g'(t) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$ 有秩 p 时, 简单地说, g 在点 t 有秩 p. 因此性质 (iii) 说, g 在原点 O 有秩 p.

另一方面, 这里对 (iii) 中问题作一说明: 设 $t=(t_1,\cdots,t_p)$ 是 Ω 中一点; 由假设, 点 $g(t)=g(t_1,\cdots,t_p)$ 的坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 是 $C^k(k\geqslant 1)$ 类函数 $g_1,\cdots,g_n$, 并且由假设, 对于 $t_1=\cdots=t_p=0$, 矩阵

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial t_j}(t_1,\cdots,t_p)\right)$$

的秩是 p. 由连续性, 如果 t 属于 O 的一个开邻域 $\Omega'(\Omega'\subset\Omega)$, 矩阵的秩仍然是 p. 因此必要时用 Ω' 代替 Ω, 在 (iii) 的叙述中可假定对于任何 $t\in\Omega, g'(t)\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$ 的秩是 p. 如果是这样, 可以说在 a 的邻域内, g 是 M 的一种 (C^k 类) 参变量表示.

现在来证明命题 4.7.1. 先证明由 (iii) 可导出 (ii): 假定 (iii) 是正确的, 可对坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 作一种排列, 使得方阵

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial t_j}(0,\cdots,0)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

有 p 秩. 由局部反演定理 (上编《微分学》, 第一章, 4.6 段), 变换

$$x_i=g_i(t_1,\cdots,t_p)(1\leqslant i\leqslant p) \tag{4.7.1}$$

是从 O 的一个开邻域 Ω' 到点 $(a_1,\cdots,a_p)\in\mathbb{R}^p$ 的一个开邻域上的一个 C^k 微分同胚. 设

$$t_i=h_i(x_1,\cdots,x_p)$$

是逆变换. 必要时用 Ω' 代替 Ω, 并且用开集 V' 代替 V, 使得 $g(\Omega')=M\bigcap V'$, 我们看出 $M\bigcap V'$ 中的点是 $(x_1,\cdots,x_n)\in V'$, 且满足下列各式:

$$\begin{cases}x_{p+1}=g_{p+1}(h_1(x_1,\cdots,x_p),\cdots,h_p(x_1,\cdots,x_p)),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n=g_n(h_1(x_1,\cdots,x_p),\cdots,h_p(x_1,\cdots,x_p)).\end{cases}$$

上列各式右边是 C^k 类函数 $\varphi_{p+1}(x_1,\cdots,x_p),\cdots,\varphi_n(x_1,\cdots,x_p)$, 这样就证明了性质 (ii).

现证明由 (ii) 可导出 (i). 假定 (ii) 是正确的, 令

$$\begin{cases}y_i=x_i-a_i & \text{对于 } 1\leqslant i\leqslant p,\\ y_j=x_j-\varphi_j(x_1,\cdots,x_p) & \text{对于 } p+1\leqslant j\leqslant n.\end{cases} \tag{4.7.2}$$

这变换是从 a 在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开邻域 V 到 O 在 $\mathbb{R}^n$ 中一个邻域 W 上的 C^k 微分同胚, 它的逆微分同胚是

$$\begin{cases}x_i=y_i+a_i & \text{对于 } 1\leqslant i\leqslant p,\\ x_j=y_j+\varphi_j(y_1+a_1,\cdots,y_p+a_p) & \text{对于 } p+1\leqslant j\leqslant n.\end{cases}$$

C^k 微分同胚 (4.7.2) 显然把 $M\bigcap V$ 映射到 $y\in W$ 中满足下列条件各点所构成的集上:

$$y_{p+1}=0,\cdots,y_n=0.$$

因此性质 (i) 成立.

最后要证明由 (i) 可导出 (iii): 假定 (i) 是正确的, 设 $h:W\to V$ 是 f 的逆 C^k 微分同胚. W 与 $y_{p+1}=0,\cdots,y_n=0$ 的交集与含原点 $O\in\mathbb{R}^p$ 的一个开集 $\Omega(\subset\mathbb{R}^p)$ (坐标 $y_1,\cdots,y_p$) 重合; h 在 Ω 的限制 g 是一个 C^k 类映射, 它的像正好是 $M\bigcap V$. 我们有 $g(0)=a$; 至于线性映射 $g'(0)\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^n)$, 它是线性映射 $h'(0)\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ 在由 $y_{p+1}=0,\cdots,y_n=0$ 所确定的子向量空间中的限制. 既然 $h'(0)$ 是一同构 $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 它在子空间 $\mathbb{R}^p$ 的限制有秩 p, 从而 $g'(0)$ 有秩 p. 于是条件 (iii) 成立.

命题 4.7.1 证完.

定义. 当一个子集 $M\subset\mathbb{R}^n$ 及一个点 $a\in M$ 满足命题 4.7.1 中三个 (等价) 条件之一时, 就说在 a 的邻域内, M 是一个 p 维及 C^k 类的流形. 我们注意到必须有 $p\leqslant n$.

定义. 设有子集 $M\subset\mathbb{R}^n$; 如果对于任何点 $a\in M$, 在 a 的一个邻域内, M 是一个 p 维及 C^k 类流形, 就说 M 是一个 p 维及 C^k 类流形.

对于 $p=1$, 往往说 M 是 C^k 类曲线. 对于 $p=2$, 往往说 M 是 C^k 类曲面. 例如 $(n=3,p=2)$ 要使得 $M\subset\mathbb{R}^3$ 在一点 $a\in M$ 的邻域内是一 C^k 类曲面, 必须而且只须它具有下列两 (等价) 性质中的一个性质:

(ii) 必要时对坐标 x_1,x_2,x_3 作一排列, 在 $a=(a_1,a_2,a_3)$ 的邻域内, M 由下列方程确定:

$$x_3=\varphi(x_1,x_2),$$

其中 φ 在 (a_1,a_2) 的邻域内属于 C^k 类, 而且 $\varphi(a_1,a_2)=a_3$;

(iii) 在 a 的邻域内, M 有一个 C^k 类参变量表示:

$$x_i=g_i(t_1,t_2),\quad 1\leqslant i\leqslant 3,\quad g_i(0,0)=a_i,$$

对于与 (0,0) 邻近的 (t_1,t_2), 在三个行列式

$$\frac{\partial(g_2,g_3)}{\partial(t_1,t_2)},\quad \frac{\partial(g_3,g_1)}{\partial(t_1,t_2)},\quad \frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(t_1,t_2)}$$

中, 至少有一个 $\neq 0$.

现回到一般情形 (p 及 n 是任意的). 对于 p 维及 C^k 类流形 M 在一点 $a\in M$ 的邻域内, 性质 (iii) 把我们引向 (C^k 类) 参变量表示 g 的概念. 另一方面, 考虑性质 (i) 中 C^k 微分同胚 f. 复合映射 $f\circ g$ 是在 $\mathbb{R}^p$ 中 O 的邻域内确定的, 它把这邻域双射到 p 维平面 $y_{p+1}=0,\cdots,y_n=0$ 中 O 的邻域. 点 $(f\circ g)(t)$ 的坐标 $y_1,\cdots,y_p$ 是

参变量 $t_1,\cdots,t_p$ 的 C^k 类函数, 并且容易看出: 这变换的雅可比行列式在原点的邻域内 $\neq 0$. 这变换是一个 C^k 微分同胚.

考虑另一 (C^k 类) 参变量表示 h: 把 $u_1,\cdots,u_p$ 叫做参变量 (与 O 邻近); $f\circ h$ 确定 $y_1,\cdots,y_p$ 作为 $u_1,\cdots,u_p$ 的 C^k 类函数, 而且雅可比行列式 $\neq 0$. 由此推出 h (在 O 的邻域内) 是由一个 C^k 微分同胚

$$t_i=\lambda_i(u_1,\cdots,u_p)\quad(1\leqslant i\leqslant p)$$

及参变量表示 g 复合而成. 换句话说, 如果 M 在 a 的邻域内有两个 (C^k 类) 参变量表示, 那么通过关于参变量的 C^k 微分同胚, 可从其中一个转到另一个.

命题 4.7.2. 设 g 是流形 M 在 a 的邻域中的 (C^k 类) 参变量表示; 总是假定 $g(0)=a$. 线性映射

$$g'(0):\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$$

的像是一个 p 维子向量空间; 它与参变量表示的选取无关. 我们把它叫做 (p 维) 流形 M 在点 $a\in M$ 的切向量空间, 记作 $T_a(M)$.

证. 如果 h 是另一参变量表示, 我们有 $h=g\circ\lambda$, 其中 λ 是参变量空间之间的一个 C^k 微分同胚. 因此有

$$h'(0)=g'(0)\circ\lambda'(0),$$

而且既然 $\lambda'(0)$ 是一线性同构 $\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$, 线性映射 $g'(0)$ 及 $h'(0)$ 有相同的像. 证完.

例. 在 $\mathbb{R}^3$ 中, 考虑曲面

$$x_3=\varphi(x_1,x_2),$$

其中 φ 在 (0,0) 的邻域中属于 C^k 类, 而且 $\varphi(0,0)=0$. 可取 x_1 及 x_2 作为曲面的参变量:

$$x_1=x_1,\quad x_2=x_2,\quad x_3=\varphi(x_1,x_2).$$

导出映射的矩阵是

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0,0)\\ 0 & 1 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}(0,0)\end{pmatrix},$$

并且这一映射的像是由下列方程所确定的平面:

$$x_3=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0,0)\cdot x_1+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(0,0)\cdot x_2.$$

现设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开集, M 是 U 中的一个 p 维 (及 C^k 类) 的流形, 并且 ω 是 U 中的一个 q 次微分形式, 映射 $\omega(x;\xi_1,\cdots,\xi_q)$ 是对于 $x\in U$ 及 $\xi_1,\cdots,\xi_q\in\mathbb{R}^n$ 确定的. 我们特别关心它对于

$$x\in M\quad 及\ \xi_1,\cdots,\xi_q\in T_x(M)\quad (切空间) \tag{4.7.3}$$

的值. 如果只要 $x, \xi_1, \cdots, \xi_p$ 满足 (4.7.3): 就有 $\omega(x; \xi_1, \cdots, \xi_p) = 0$, 我们说 ω *在流形 M 上引出零*. 如果在 M 中一点 a 的邻域内, f 是 M 的局部参变量表示, 那么在参变量 $t_1, \cdots, t_p$ 的空间中, “变量代换” 使 f 确定一个 q 形式 $f^*(\omega)$ (见 4.11 段, 第 240 页); *要使得在 a 的邻域中, ω 在 M 上引出零, 必须而且只须形式 $f^*(\omega)$ 恒等于零*. [这是一个容易的习题, 留给读者作解.]

4.8. 流形的定向

设 $M \subset \mathbb{R}^n$, 并且假定在 $a(\in M)$ 的邻域内, M 是 p 维及 C^k 类流形 $(k \geqslant 1)$. 设在 a 的邻域内, 有 M 的两个参变量表示 g_1 及 g_2; 作为定义如果变量代换由一个雅可比行列式 >0 的 C^k 微分同胚确定, 那么就说 g_1 及 g_2 (在 a 的邻域内) *确定了 M 的同一定向*; 如果相反地, 变量代换由一个雅可比行列式 <0 的 C^k 微分同胚确定, 就说两个参变量表示*确定了 M 的不同定向*. 因此我们把 M (在 a 的邻域内) 的所有局部参变量表示分成两类; 作为定义, 其中每个表示确定 M 在 a 的邻域内的*一个定向*.

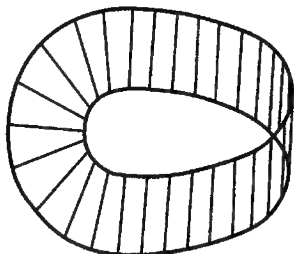
注意如果 g 是一种参变量表示, 线性映射的像 $g'(0)$ 是切空间 $T_a(M)$; 如果在参变量 $t_1, \cdots, t_p$ 的空间中取*正标架* (p 个向量 $\tau_1, \cdots, \tau_p$ 的次序使其行列式 >0), 正标架通过线性映射 $g'(0)$ 的像是切空间 $T_a(M)$ 的一个基, 也叫做空间 $T_a(M)$ 中的*一个标架*. 我们看出 M 在 a 的邻域中的定向是由向量空间 $T_a(M)$ 中*标架的选取*确定的. 两个标架确定同一定向必须而且只须 $T_a(M)$ 中把一个标架变换成另一标架的线性变换有行列式 >0.

已给 $\mathbb{R}^n$ 中一流形 M (p 维, C^k 类), 可用开集 V_i (空间 M 中的开集) 的覆盖拓扑空间 M; 对于每个 V_i, 存在着一个像是 V_i 的参变量表示:

$$f_i : \Omega_i \to V_i.$$

f_i 的选取使 M 在 V_i 所有点定向. 如果对于任何一对 (i, j), f_i 及 f_j 在 $V_i \bigcap V_j$ 中每点确定 M 的同一定向, 那么就说这些 f_i 确定 *M 的一个定向*.

如果可找到一些局部参变量表示 f_i 确定 M 的一个定向 (如上所述), 就说 M *是可定向的*. 一个流形 M, 即令是连通的, 并不总是可定向的: “默比乌斯带” 提供了不可定向曲面的一个例子.



下面将举出可定向流形的实例.

4.9. 微分 2 形式在 C^1 类 2 维定向紧流形上的积分

设 $M\subset\mathbb{R}^n$ 是一个 2 维、C^1 类流形. 假定 M 是紧的, 并且假定在 M 上已给出一个定向. 设 $\omega\in\Omega_2^{(0)}(U,F)$ 是在 M 的一个开邻域 U 内的一个 C^0 类、二次微分形式. 我们要给出下列积分的定义:

$$\iint_M \omega\in F.$$

我们从一种特殊情形开始: $M\bigcap(\operatorname{supp}\omega)$ (M 与 ω 的支撑集的交集) 包含在一个连通开集 $V\subset M$ 内 (指的是拓扑空间 M 中的开集); 对于 V, 有 C^1 类的参变量表示

$$\varphi:\Omega\to V,$$

这里 Ω 是 $\mathbb{R}^2$ (坐标 t_1 及 t_2) 中的连通开集. 选取这种参变量表示要与 M 上的已给定向协调. 注意 $\operatorname{supp}\omega\bigcap M$ 是包含在 V 内的一个紧集; 因此 $\varphi^{-1}(\operatorname{supp}\omega\bigcap M)$ 是一个紧集 $\subset\Omega$. 考虑 Ω 中的微分形式 $\varphi^*(\omega)$. 它可写成

$$f(t_1,t_2)dt_1\wedge dt_2,$$

其中 f 在 Ω 中连续, 并且有紧支撑集. 作为定义, 令

$$\iint_M \omega=\iint_\Omega f(t_1,t_2)dt_1\wedge dt_2=\iint_\Omega \varphi^*(\omega). \tag{4.9.1}$$

为了说明这一定义合理, 必须证明 $\displaystyle\iint_\omega \varphi^*(\omega)$ 与参变量表示 φ 的选取无关.

设开集 V' 的另一参变量表示是

$$\psi:\Omega'\to V'$$

这里 $V'\subset M$, 而 M 包含紧集 $M\bigcap(\operatorname{supp}\omega)$. 设

$$V_1=V\bigcap V',\quad \Omega_1=\varphi^{-1}(V_1)\subset\Omega,\quad \Omega_1'=\psi^{-1}(V_1)\subset\Omega'.$$

既然 $\varphi^*(\omega)$ 的支撑集包含在 Ω_1 内, 我们有

$$\iint_\Omega \varphi^*(\omega)=\iint_{\Omega_1} \varphi^*(\omega); \tag{4.9.2}$$

我们同样有

$$\iint_{\Omega'} \psi^*(\omega)=\iint_{\Omega_1'} \varphi^*(\omega). \tag{4.9.3}$$

然而在 Ω_1' 内, 我们有 $\psi=\varphi\circ\lambda$, 其中 λ 是 C^1 微分同胚 $\Omega_1'\to\Omega_1$, 它保持定向不变 (即相应的雅可比行列式 >0). 由此得

$$\psi^*(\omega)=\lambda^*(\varphi^*(\omega));$$

因此由重积分的变量代换定理 (4.6 段), 我们有

$$\iint_{\Omega_1'} \psi^*(\omega) = \iint_{\Omega_1} \varphi^*(\omega),$$

由 (4.9.2) 及 (4.9.3), 这就是说,

$$\iint_{\Omega'} \psi^*(\omega) = \iint_{\Omega} \varphi^*(\omega).$$

因此定义 (4.9.1) 是合理的.

如果有两个形式 ω_1 及 $\omega_2, M\bigcap(\operatorname{supp}\omega_1)$ 及 $M\bigcap(\operatorname{supp}\omega_2)$ 包含在同一个连通开集 $V\subset M$ 内, 而且对于 V, 存在着一个 C^1 类参变量表示, 那么我们显然有

$$\iint_M(\omega_1+\omega_2) = \iint_M \omega_1 + \iint_M \omega_2.$$

这一说明使我们能在不对 ω 的支撑集加上限制性的假设情形下, 作出 $\iint_M \omega$ 的定义.

现考虑一般情形: M 是紧集, 可用有限个 (周围空间 $\mathbb{R}^n$ 中的) 开集 U_i 覆盖它, 并使每个 $V_i = M\bigcap U_i$ 有一参变量表示. 于是存在着 M 的一个紧邻域 K, 它也被这些 U_i 所覆盖. 由定理 4.1.1, 在 K 上, 从属于覆盖 (U_i), 存在着一个单位分解 (f_i); 因此我们有

$$\begin{cases}\operatorname{supp} f_i \subset U_i,\\ \displaystyle\sum_i f_i(x) = 1 \quad 对于\ x\in K.\end{cases}$$

从而在 M 的邻域中, 形式 ω 是形式

$$\omega_i = f_i\omega$$

的和. 然而 $M\bigcap\operatorname{supp}(\omega_i)\subset M\bigcap U_i = V_i$; 因此每个 ω_i 满足上面研究过的 "特殊情形" 中的假设. 于是积分 $\iint_M \omega_i$ 已有定义. 作为定义, 令

$$\iint_M \omega = \sum_i\left(\iint_M \omega_i\right) = \sum_i\left(\iint_M f_i\omega\right). \tag{4.9.4}$$

如果证明了 (4.9.4) 中最后一项的值与分解 (f_i) 的选取无关, 上述定义就是合理的. 假定有另一分解 (g_j) 从属于覆盖 (U_j'); 设 I 是指标 i 的 (有限) 集, 并且设 J 是指标 j 的 (有限) 集. 对于固定的 i, 当 x 在 M 的适当邻域中时, 我们有 $f_i(x) = \sum_{j\in J} f_i(x)g_j(x)$; 因此微分形式 $f_i\omega$ 在 M 的邻域中等于和式

$$\sum_{j\in J} f_ig_j\omega.$$

这些形式的所有支撑集与 M 的交集 $\subset V_i$; 因此我们有 (参看特殊情形)

$$\iint_M f_i\omega = \sum_{j\in J}\iint_M f_i g_j\omega.$$

关于 i 求和, 就得到

$$\sum_{i\in I}\iint_M f_i\omega = \sum_{i\in I, j\in J}\iint_M f_i g_j\omega.$$

同样可求得

$$\sum_{j\in J}\iint_M g_j\omega = \sum_{i\in I, j\in J}\iint_M f_i g_j\omega.$$

比较上两式, 就得到

$$\sum_{i\in I}\iint_M f_i\omega = \sum_{j\in J}\iint_M g_j\omega.$$

证完.

于是我们作出了积分 $\iint_M \omega$ 的定义; 这显然是 ω 的一个线性映射.

推广. 考虑一个 2 维定向流形; 我们要在其中 "一个带边界的紧集" 上积分. 现作确切说明: 又设 $M\subset\mathbb{R}^n$ 是一个 C^1 类 2 维定向流形. 如果 K 是包含在 M 中的紧集, 把 K 在 M 中的边界记作 ∂K (注意: 涉及的不是 K 在 $\mathbb{R}^n$ 中的边界; 如果 $n>2, K$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的边界就是 K).

定义. 如果紧集 $K\subset M$ 满足下列两条件, 就叫做 C^1 类带边界的紧集:

(a) ∂K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的分段 C^1 类曲线 (当然这曲线包含在 M 内; 它有有限个、可能零个角点);

(b) 任何非角点 $a\in\partial K$ 有在 M 中的一个开邻域 V, 使得 $V\bigcap\complement(\partial K)$ 有两个连通的分支: 一个由 $V\bigcap\complement K$ 中的点组成, 另一个由 V 中所含 K 的内点组成.

总之, 这定义完全与当 M 是平面 $\mathbb{R}^2$ 时已给的定义相似 (参看 4.2 段). 如同 $M=\mathbb{R}^2$ 情形中一样, 我们把 M 的已给定向与边界 ∂K 上 C^1 类弧的定向联系起来: 在每一非角点 $a\in\partial K$, 取一种标架 (在切平面 $T_a(M)$ 内), 它的第一个向量与 ∂K 相切 (指向 ∂K 定向的方向), 第二个向量指向 K 的内部的一边; 这就是对于切平面 $T_a(M)$ 定向的正标架.

如果 ω 是 K 的邻域内的微分 2 形式, 与前面一样, 我们用单位分解作出 $\iint_K \omega$ 的定义.

指出这一点后, 斯托克斯定理 (定理 4.4.1) 可推广如下:

定理 4.9.1. 如果在 2 维 (C^1 类) 定向流形 M 中, K 是带 C^1 类边界的一个紧集, 并且如果 α 是 K 的邻域中的一个 C^1 类微分 1 形式, 那么我们有

$$\iint_K d\alpha = \int_{\partial K}\alpha, \tag{4.9.5}$$

[其中 ∂K 的定向按照上面解释约定].

证明节略. 应用单位分解, 可以把问题化成在下列情形证明 (4.9.5): α 的支撑集与 K 的交集是包含在开集 $V \subset M$ 中的一个紧集, 而在 V 内有一参变量表示 $\varphi:\Omega \to V$. 于是 (4.9.5) 的两边分别等于

$$\iint_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^*(d\alpha) \quad 及 \quad \iint_{\varphi^{-1}(\partial K)} \varphi^*(\alpha);$$

我们还有 $\varphi^*(d\alpha) = d\varphi^*(\alpha)$ [实际上, 如果 φ 不属于 C^2 类, 还有一点小困难, 但我们放下这一点]. 令 $\varphi^*(\alpha) = \beta$ (Ω 中有紧支撑集的微分形式), 问题化成证明

$$\iint_{\varphi^{-1}(K)} d\beta = \int_{\partial(\varphi^{-1}(K))} \beta,$$

这 "几乎" 就是斯托克斯公式: "几乎", 因为 $\varphi^{-1}(K)$ 不是紧集; 但因 β 有紧支撑集, 这一困难可以解决.

例. 取 $n = 3$, 并且把周围空间 $\mathbb{R}^3$ 中的坐标叫做 x, y, z. 设 M 是 $\mathbb{R}^3$ 中一个曲面, 假定它是定向的, 并且设 K 是包含在 M 内的一个带边界的紧集. 如果 $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ (其中 P, Q, R 在 K 的邻域中是 x, y, z 的 C^1 类函数), 那么我们有关系式 (4.9.5), 在这里可写成

$$\boxed{\begin{gathered}\iint_K \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \\ = \int_{\partial K} Pdx + Qdy + Rdz.\end{gathered}}$$

4.10. n 重积分

我们限于简述 n 重积分理论. 在平面 $\mathbb{R}^2$ 中, 我们考虑过的紧集 K 有分段 C^1 类的 "边界"; 如果假定 ∂K 没有角点, 就有带 C^1 类边界的紧集概念. 我们要推广到 n 维的正是这种概念, 避免了 "角" 点出现的可能性, 因为否则理论的叙述就太复杂了.

定义. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 满足下列两条件的紧集 K 叫做带 C^1 类边界的紧集:

(a) 它的边界点集 ∂K 是一个 $n-1$ 维的 (紧) 流形;

(b) 如果 $a \in \partial K$, 存在着一个从 a 的一个开邻域 V 到一个开球 B 上的 C^1 微分同胚 φ, 使得 $\varphi(a) = 0$, 使得 $\varphi(K \bigcap V)$ 是 B 中第一个坐标 $x_1 \leqslant 0$ 的点组成的集, 并且使得 $\varphi((\partial K) \bigcap V)$ 是 B 中 $x_1 = 0$ 的点组成的集.

对于 $n = 2$, 这定义恰好等价于已给定义.

我们确定 $n-1$ 维流形 ∂K 的定向如下: 对于每点 $a \in \partial K$, 选取一个标架 $(e_1, \cdots, e_n)$ (周围空间 $\mathbb{R}^n$ 的基), 使得:

(i) 这标架是正的 (它的行列式 >0);

(ii) e_1 指向 K 的外部一边, 而 $e_2,\cdots,e_n$ 与 ∂K 相切.

于是 $(e_2,\cdots,e_n)$ 是切空间 $T_a(\partial K)$ 的一个基, 并为这空间定向, 这样得到的 $T_a(\partial K)$ 的定向与所作选取无关. 我们看到, 如果选取条件 (b) 中的微分同胚 φ 使得它的雅可比行列式 >0, 它引导出从子空间 $x_1=0$ (由坐标 $x_2,\cdots,x_n$ 的次序定向) 到 $(\partial K)\bigcap V$ 上的一个 C^1 微分同胚, 并给出 ∂K 在 a 的邻域中的定向.

注意. 由此可见, 带边界的紧集的边界总是一个可定向的流形.

习题. 证明对于 $n=2$, 这里给出的关于 ∂K 的定向的定义与 4.2 段中所给出的定义相符合.

现在要写出 n 重积分: 我们简单地写出 $\int^{(n)}$, 而不是接连写出 n 个符号 $\int$. 设 ω 是紧集 K 的邻域中的 C^0 类微分 n 形式, 我们有

$$\omega=f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$$

这里 f 在 K 的邻域中连续. 如同对 $n=2$ 一样, 作为定义, 令

$$\int_K^{(n)}\omega=\int_{\mathbb{R}^n}^{(n)}\overline{f}(x_1,\cdots,x_n)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n,$$

这里 $\overline{f}$ 表示在 K 上等于 f, 在 K 外等于 0 的映射. 这是一个勒贝格可积映射, 而且如果 K 是带边界的紧集, 它甚至也是黎曼可积的. 这积分具有一些经典的性质, 这些性质可叙述为与 4.3 段中的 (i), (ii), (iii), (iv) 类似的性质. 下面是有关理论中的两个基本定理:

定理 I_n (变量代换). *如果 φ 是从 K 的一个连通开邻域 U 到一个开集 $U'\subset\mathbb{R}^n$ 上的一个 C^1 微分同胚, 并且如果 ω 是 U' 内一个 C^0 类微分 n 形式, 我们有*

$$\int_{\varphi(K)}^{(n)}\omega=\varepsilon\int_K^{(n)}\varphi^*(\omega)$$

这里如果 φ 保持定向 (雅可比行列式 >0), $\varepsilon=+1$; 否则 $\varepsilon=-1$.

如果证明了这定理, 当我们在空间 $\mathbb{R}^p$ 内 $(p>n)$ 有一个 C^1 类、n 维的定向紧流形 M, 并且在 M 的邻域内有一个 n 形式 ω 时, 就可作出下列积分的定义:

$$\int_M^{(n)}\omega;$$

事实上, 如同在 4.9 段, 我们用一种单位分解; 我们注意到: 当 ω 的支撑集与 M 相交所成的紧集包含在 $V\subset M$ 内, 而对 V 有参变量表示时, 由这种参变量表示定义的积分

$$\int_M^{(n)}\omega$$

与参变量表示的选取无关 (这里要用到定理 I_n).

定理 II_n (斯托克斯公式). 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中 C^1 类带边界的紧集, 并且设 α 是 K 的邻域内的 C^1 类微分 $(n-1)$ 形式. 只要有如同上面解释过的 ∂K 的定向, 我们就有

$$\boxed{\int_K^{(n)} d\alpha = \int_{\partial K}^{(n-1)} \alpha}.$$

我们不证明上两定理. 但指出证明的原则: 假定已证明 I_{n-1} (例如 I_1 是周知的). 于是由此证明 II_n, 恰好如同在 4.5 段中用 I_1 证明 I_2 所作的一样. 为此, 我们采用一种单位分解, 还例如假定 $\alpha = P dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$, 并进行明确的计算. 证明了 II_n, 然后证明 I_n, 恰好如同在 4.6 段中用斯托克斯公式证明定理 4.6.2 时所作的一样. 我们省去了有些麻烦的详细证明.

我们甚至可考虑 $\mathbb{R}^p(p>n)$ 中 (n 维) 流形 M 内带边界的紧集概念, 并由此推广定理 II_n. 这样得到一个定理, 对于 $n=2$ 就化成定理 4.9.1.

例. 对于 $n=3$ 应用定理 II_n. 于是设 K 是 $\mathbb{R}^3$ 中带边界的紧集; ∂K 是 C^1 类 (2 维) 曲面. 设 α 是一个 2 形式:

$$\alpha = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy,$$

其中 A, B, C 是 x, y, z 的 C^1 类函数. 那么我们有

$$\boxed{\iiint_K \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = \iint_{\partial K} A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy}$$

(有时叫做 "奥斯特罗格拉茨基公式").

4.11. 在流形 $M \subset \mathbb{R}^n$ 上的微分形式

由定义, 在 $C^k(k \geqslant 1)$ 类、p 维流形 M 上的 q 次微分形式 ω 是一个映射

$$\omega(x; \xi_1, \cdots, \xi_q),$$

其中 $x \in M$, 并且向量 $\xi_1, \cdots, \xi_q$ 在切空间 $T_x(M)$ 中; 假定对于每个 $x \in M$, 映射

$$(\xi_1, \cdots, \xi_q) \to \omega(x; \xi_1, \cdots, \xi_q)$$

在向量空间 $T_x(M)$ 上是交错多重线性的.

显然, 如果我们在开集 $U \supset M$ 中有一微分 q 形式 α, 它就在 M 上 "引导" 出一个刚才所说意义下的微分 q 形式; 事实上, $\alpha(x; \xi_1, \cdots, \xi_q)$ 是对 $x \in U, \xi_1, \cdots, \xi_q \in \mathbb{R}^n$ 确定的, 并且对 $\xi_1, \cdots, \xi_q$ 是交错多重线性的; 于是 ω 从取映射 α 的限制而得.

设 V 是一个开集 $\subset M$, 并且设 $\varphi:\Omega\to V$ 是一个 C^k 类参变量表示 (Ω 是 $\mathbb{R}^p$ 中一个开集). 如果 ω 是 M 上的一个微分 q 形式, 映射

$$\omega(\varphi(t);\varphi'(t)\cdot\tau_1,\cdots,\varphi'(t)\cdot\tau q)$$

是开集 $\Omega\subset\mathbb{R}^p$ 中的一个微分 q 形式, 其中 $t\in\Omega$, 并且 $\tau_1,\cdots,\tau_q$ 是 $\mathbb{R}^p$ 中的向量: 这是明显的. 这一形式将记作 $\varphi^*(\omega)$. 如果 $\varphi^*(\omega)$ 属于 C^h 类 (其中 $h<k$), 对于任何其他 C^k 类参变量表示也是这样. (习题: 用参变量表示的代换证明这一结论.) 我们说 q 形式 ω 在 M 上属于 C^h 类, 如果 M 上任何点有一开邻域 V (在 M 内) 具有这一性质. 我们注意到: *在一个流形 M 上的 C^h 类微分形式概念, 只有当流形至少属于 C^{h+1} 类时才有意义.*

我们可用明显的方式确定 M 上两个 q 次微分形式的和. 而且对两个交错多重线性形式的外乘积, 如同我们在 2.2 段中所做的那样, 也可确定一个形式 α 及一个形式 β 的*外乘积*. 同样可对一个 $C^h(h\geqslant 1)$ 类形式 ω 确定 $d\omega$. 我们不展开这方面的理论.

现设 M 是 p 维、C^1 类流形, 并且设 ω 是 M 上的有紧支撑集的 C^0 类微分 p 形式. 假定已在 M 上给出*定向* (这意味着 M 是可定向的). 于是可确定积分 $\int_M^{(p)}\omega$, 所用步骤如同在 4.10 段中那样: 采用一种单位分解, 把问题化到 ω 的支撑集与 M 相交于一个紧集情形, 这紧集包含在 M 中一开集 V 内, 而且存在着与 M 的定向相适应的参变量表示 $\varphi:\Omega\to V$. 于是令

$$\int_M^{(p)}\omega=\int_\Omega^{(p)}\varphi^*(\omega);$$

上式右边的值与 φ 的选取无关.

4.12. p 维流形 $M(M\subset\mathbb{R}^n)$ 的 p 维体积元素

设 M 是一个 C^1 类 p 维流形, 假定已有*定向*. 我们要在 M 上确定一个 C^0 类微分 p 形式, 叫做 p *维体积元素*. 在周围空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 我们有基本二次形式 (坐标的平方和); 因此我们知道一个向量的 (欧几里得) 长度以及两个*正交*向量的意义. 于是设 x 是 M 中一点; 切空间 $T_x(M)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 p 维子空间; 选取 $T_x(M)$ 的一个*标准正交基* $(e_1,\cdots,e_p)$, 即由 p 个长度是 1、并且两两正交的向量所形成的基. 选取基还要使这个基所确定的向量空间 $T_x(M)$ 的定向与流形 M 的已给定向符合. (我们记得 M 的一种定向就确定每个切空间的一种定向.) 如果 $(e_1',\cdots,e_p')$ 是 $T_x(M)$ 与其定向适合的另一标准正交基, $(e_1',\cdots,e_p')$ 关于 $(e_1,\cdots,e_p)$ 的行列式等于 $+1$.

设 $\xi_1,\cdots,\xi_p$ 是空间 $T_x(M)$ 中的向量; 这些向量关于基 $(e_1,\cdots,e_p)$ 的行列式与基的选取无关. 我们把这行列式简单地记作 $\det(\xi_1,\cdots,\xi_p)$. 注意如果我们改变流形 M 的定向, 这行列式要乘以 -1. 于是我们可确定所求的 p 次微分形式 ω; 对于

$\xi_1, \cdots, \xi_p \in T_x(M)$, 令

$$\omega(x; \xi_1, \cdots, \xi_p) = \det(\xi_1, \cdots, \xi_p). \tag{4.12.1}$$

我们要证明: 它属于 C^0 类, 这就是说, 对于一种 C^1 类参变量表示 φ, 形式 $\varphi^*(\omega)$ 有连续的系数. 为了计算 $\det(\xi_1, \cdots, \xi_p)$, 可进行如下: 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中与 $T_x(M)$ 正交的子空间, 并选取其中的标准正交基 $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$, 使得

$$(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$$

关于 $\mathbb{R}^n$ 的典范基有行列式 $+1$. 于是

$$\omega(x; \xi_1, \cdots, \xi_p) = \det(\xi_1, \cdots, \xi_p, e_{p+1}, \cdots, e_n), \tag{4.12.2}$$

这里行列式是关于 $\mathbb{R}^n$ 的典范基取的.

M 中相对紧开集 V 的体积: 由定义, 这就是积分

$$\int_V^{(p)} \omega,$$

其中 ω 表示 p 维体积元素. 如果 V 有一参变量表示 $\varphi: \Omega \to V$, 由定义, 体积就是

$$\int_\Omega^{(p)} \varphi^*(\omega),$$

其中 $\varphi^*(\omega)$ 写成 $f(t_1, \cdots, t_p)dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_p$; 由定义, 我们证实 $f(t_1, \cdots, t_p) > 0$. [而且这是要在例子中证实的.] 因此非空开集 V 的 p 维体积 > 0.

例. $n = 3, p = 2$. 因此问题在于空间 $\mathbb{R}^3$ 中一个有定向的曲面 M; 设 x, y, z 是 $\mathbb{R}^3$ 中的坐标. 在 M 上每点的邻域中, 有由三个两实变量 u 与 v 的 C^1 类函数

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

所确定的参变量表示 φ . 写出矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{4.12.3}$$

的秩是 2 来表明 φ 有 2 秩. 因此下列三个量中

$$p = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad q = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad r = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

至少有一个在平面 (u, v) 上开集 Ω 中每一点是 $\neq 0$.

在与参变量 u, v 的值相对应的一点 $(x, y, z) \in M, M$ 的单位法向量是有下列分量的向量 e_3:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

事实上, e_3 是上述向量或它的反向向量; 必须选取符号 ε, 使由两向量 (4.12.3) 及 e_3 所形成的标架是正的, 即行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\varepsilon p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} & \dfrac{\varepsilon q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} & \dfrac{\varepsilon r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \end{vmatrix}$$

是 >0. 行列式是

$$\varepsilon \frac{p^2+q^2+r^2}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \varepsilon \sqrt{p^2+q^2+r^2}.$$

因此必须取 $\varepsilon=+1$, 并且 2 维体积 (或面积元素) ω 对于参变量表示 φ , 要使

$$\varphi^*(\omega) = \sqrt{p^2+q^2+r^2} du \wedge dv. \tag{4.12.4}$$

命题 4.12.1. 如果在曲面 M 上每点, 把 (定向) M 的单位法向量的分量记作 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, 那么给出面积元素的形式 ω 等于

$$\cos\alpha dy \wedge dz + \cos\beta dz \wedge dx + \cos\gamma dx \wedge dy. \tag{4.12.5}$$

证. 这是由于

$$dy \wedge dz = p du \wedge dv, \quad dz \wedge dx = q du \wedge dv, \quad dx \wedge dy = r du \wedge dv.$$

另一例. $n=3, p=1$. 问题在于 $\mathbb{R}^3$ 中一条定向曲线 C; 1 维体积元素叫做曲线的长度元素: 这是曲线上的微分 1 形式. 我们要证明: 如果曲线上一点的坐标 x, y, z 是 C^1 类函数 $x(t), y(t), z(t)$, 它们的导数 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 不同时是零, 那么只要曲线的定向与 t 的增长相应, 长度元素是

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} dt.$$

现在如果曲线 C 包含在曲面 M (用参变量 u 及 v 表示) 内, 那么 C 就由取 u 及 v 作为 t 的函数来确定, 并且长度元素就是

$$\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2} dt,$$

其中

$$\begin{cases} E = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}, \\ G = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

我们注意到: 知道了函数 E, F, G, 就可计算面积元素 $\sqrt{p^2+q^2+r^2}du \wedge dv$, 这是由于有关系式

$$\boxed{p^2 + q^2 + r^2 = EG - F^2}; \tag{4.12.6}$$

而这关系式可由拉格朗日恒等式.

$$\begin{aligned} &(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2 \\ &= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 \end{aligned}$$

导出. 于是知道了曲面上所作曲线的长度元素就决定了曲面上的面积元素 (可能差一符号).

5.　流形上数值函数的极大与极小

我们回想在上编《微分学》的第一章第 8 节中, 对于巴拿赫空间 E 中开集 U 内所确定的实值函数 f, 讲了它的相对极小, 在这里, $E = \mathbb{R}^n$.

5.1.　第一阶条件

设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中 C^1 类流形, 并且设 $f: U \to \mathbb{R}$ 是包含 M 的开集 U 内确定的 C^1 类函数. 考虑由 f 的限制得到的函数 $g: M \to \mathbb{R}$, 并且要问在一点 $a \in M$, 函数 g 是否有相对极小, 也就是问, 对于与 a 充分接近的任何 $x \in M$, 是否有

$$f(x) \geqslant f(a).$$

如果存在着 a 的一个邻域 V, 使得对于任何 $x \in M \bigcap V$, 而且 $x \neq a$,

$$f(x) > f(a),$$

就说函数 g 在点 a 有严格的相对极小.

我们要给出三个命题, 分别与上编《微分学》的第一章中命题 8.1.1, 定理 8.2.1 以及定理 8.3.3 相类似.

命题 5.1.1. 如果 f 在 M 的限制 g 在点 $a \in M$ 有相对极小, 那么导出映射

$$f'(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$$

在切空间 $T_a(M) \in \mathbb{R}^n$ 内为零 [相对极小的必要条件].

证. 设 $\varphi : \Omega \to M$ 是 M 中 a 的邻域内的一个 C^1 类参变量表示, 而且 $\varphi(0) = a$. 要 $f \circ \varphi$ 在点 O 有一相对极小. 为此, 必须 (参看上编《微分学》, 第一章, 命题 8.1.1) 有

$$(f \circ \varphi)'(0) = 0,$$

即

$$f'(a) \circ \varphi'(0) = 0$$

这表明 $f'(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ 在 $\varphi'(0)$ 的像上、正好在切空间 $T_a(M)$ 上为零. 证完.

5.2. 第二阶条件

此后假定 M 是 C^2 类流形, 并且 f 是 C^2 类函数. 双线性形式 $f''(a)$ 引导出对称双线性映射

$$T_a(M) \times T_a(M) \to \mathbb{R}.$$

但我们要考虑的是另一对称双线性形式

$$\Phi : T_a(M) \times T_a(M) \to \mathbb{R},$$

现将予以考虑. 为了确定它, 我们记得: 如果 φ 是一个 C^1 类参变量表示 $\Omega \to M$, 而且 $\varphi(0) = a$ (这里 Ω 是 $\mathbb{R}^p$ 中含原点的开集), 那么 $\varphi'(0)$ 是从 $\mathbb{R}^p$ 到切空间 $T_a(M)$ 上的线性双射. 假定 φ 属于 C^2 类, 并用下列条件确定 Φ: 对于 τ_1 及 $\tau_2 \in \mathbb{R}^p$,

$$\Phi(\varphi'(0) \cdot \tau_1, \varphi'(0) \cdot \tau_2) = (f \circ \varphi)''(0) \cdot (\tau_1, \tau_2). \tag{5.2.1}$$

我们要证明这样确定的 Φ 与参变量表示 φ 的选取无关. 事实上, 用 $\psi = \varphi \circ \lambda$ 代替 φ, 其中 λ 是从 O (在 $\mathbb{R}^p$ 中) 的一个邻域到 O (在 $\mathbb{R}^p$ 中) 的一个邻域的 C^2 微分同胚. 于是 $\psi'(0) = \varphi'(0) \circ \lambda'(0)$: 因此必须证明

$$\Phi(\varphi'(0) \circ \lambda'(0) \cdot \tau_1, \varphi'(0) \circ \lambda'(0) \cdot \tau_2) = (f \circ \varphi \circ \lambda)''(0) \cdot (\tau_1, \tau_2). \tag{5.2.2}$$

为了简单起见, 令 $f \circ \varphi = h$; 由《微分学》的第一章, 给出复合映射的二阶导出映射的公式 (7.5.1),

$$(h \circ \lambda)''(0)(\tau_1, \tau_2) = h''(0) \cdot (\lambda'(0) \cdot \tau_1, \lambda'(0) \cdot \tau_2) + h'(0) \cdot (\lambda''(0) \cdot (\tau_1, \tau_2)).$$

但是既然 $f \circ \varphi = h$ 在原点有一相对极小, 我们有 $h'(0) = 0$, 从而 (5.2.2) 的右边等于

$$h''(0) \cdot (\lambda'(0) \cdot \tau_1, \lambda'(0) \cdot \tau_2);$$

然而由于关系式 (5.2.1), 把其中 τ_1 换成 $\lambda'(0)\cdot\tau_1,\tau_2$ 换成 $\lambda'(0)\cdot\tau_2$, 上式最后等于 (5.2.2) 的左边. 因此 (5.2.2) 得证, 并且双线性形式 Φ 与参变量表示 φ 的选取无关. 我们注意到, 如果我们应用《微分学》第一章的公式 (7.5.1) 到 (5.2.1) 的右边, 我们得到: 对于 $\xi_1\in T_a(M),\xi_2\in T_a(M)$, 我们有

$$\Phi(\xi_1,\xi_2)=f''(a)\cdot(\xi_1,\xi_2)+f'(a)\cdot(\varphi''(0)\cdot(\varphi'(0)^{-1}\xi_1,\varphi'(0)^{-1}\xi_2)). \tag{5.2.3}$$

因此我们看到不要把 Φ 与由 $f''(a)$ 在 $T_a(M)$ 上引出的双线性形式相混淆.

命题 5.2.1. 要使 f 在流形 M 上的限制在点 $a\in M$ 有一相对极小, 必须对于任何 $\xi\in T_a(M)$,

$$\Phi(\xi,\xi)\geqslant 0$$

证. 这条件等价于说: 对于任何 $\tau\in\mathbb{R}^p$,

$$(f\circ\varphi)''(0)(\tau,\tau)\geqslant 0,$$

而且我们知道 (《微分学》, 第一章, 定理 8.2.1) 要使 $f\circ\varphi$ 在原点有一相对极小, 这条件是必要的.

命题 5.2.2. 要使 f 在流形 M 的限制在点 $a\in M$ 有严格相对极小, 只须对 $T_a(M)$ 中任何非零 ξ,

$$\Phi(\xi,\xi)>0.$$

证. 这条件表明双线性形式 $(f\circ\varphi)''(0)$ 是正的并且是非退化的; 然而我们知道 (《微分学》, 第一章, 定理 8.3.3), 这是使 $f\circ\varphi$ 在原点有严格相对极小的一个充分条件.

6. 弗罗贝尼乌斯定理

6.1. 问题的地位

在上编《微分学》第二章中, 已经研究过微分方程

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),$$

其中 t 是一实变量, x 是 t 的未知映射, 在巴拿赫空间 E 中取值.

现在要把变量 $t\in\mathbb{R}$ 换成变量 $x\in E$ (巴拿赫); y 是 x 的一个未知映射, 在巴拿赫空间 F 中取值. 我们要考虑下列形状的微分方程:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{6.1.1}$$

既然 x 的映射 y 的导出映射 dy/dx 在 $\mathscr{L}(E;F)$ 中取值, 已给映射 $f(x,y)$ 要在 $\mathscr{L}(E;F)$ 中取值. 完全准确地说: 设 U 是一开集 $\subset E\times F$, 并且设

$$f: U \to \mathscr{L}(E;F)$$

是一个已给的 C^1 类映射. 我们把在开集 $V\subset E$ 中确定、在 F 中取值的一个 C^1 类映射 $y=\varphi(x)$ 叫做方程 (6.1.1) 的解, 如果下列两条件成立:

(i) 对于任何 $x\in V, (x,\varphi(x))\in U$;

(ii) 对于任何 $x\in V, \varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$.

例. 取 $F=\mathbb{R}, E=\mathbb{R}^n$; 方程 (6.1.1) 可写成

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=f_i(x_1,\cdots,x_n,y),\quad 1\leqslant i\leqslant n \tag{6.1.2}$$

其中在开集 $U\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 个 C^1 类函数 f_0 是给定的, 并且取纯量值. 一个解是一个取纯量值的函数 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$, 使得

$$d\varphi=\sum_{i=1}^n f_i(x_1,\cdots,x_n,\varphi)dx_i.$$

方程 (6.1.2) 也往往写成下列形式

$$dy=\sum_{i=1}^n f_i(x_1,\cdots,x_n,y)dx_i. \tag{6.1.3}$$

解就是使微分形式 $dy-\sum_{i=1}^n f_i dx_i$ 为零的一些函数 $y(x_1,\cdots,x_n)$. 像 (6.1.3) 这样的方程往往叫做 “全微分方程”.

回到方程 (6.1.1) 的一般情形. 未知映射 $y=\varphi(x)$ 必须使下列微分形式为零:

$$dy-f(x,y)\cdot dx. \tag{6.1.4}$$

准确地说, 这是一个在开集 $U\subset E\times F$ 中的一次微分形式, 并且在 F 中取值: 在点 $(x,y)\in U$ 并且在向量 $(\xi,\eta)\in E\times F$, 它连带着向量

$$\eta\ -f(x,y)\cdot\xi\in F.$$

由 “变量代换”:

$$x=x,\quad y=\varphi(x), \tag{6.1.5}$$

它在开集 $V\subset E$ 中确定一个在 F 中取值的微分形式

$$\varphi'(x)\circ dx-f(x,\varphi(x))\cdot dx.$$

说 $y=\varphi(x)$ 是 (6.1.1) 的解, 就是说由变量代换 (6.1.5), 从 (6.1.4) 所导出的微分形式是零.

这启发我们对方程 (6.1.1) 的 "解" 的概念作一推广: 这就是两个单变量 t (在巴拿赫空间 G 的一个开域 W 中变动) 的一组两个映射 $x(t), y(t)$, 使得在微分形式 (6.1.4) 中作变量代换

$$x=x(t), \quad y=y(t)$$

就得到零; 换句话说,

$$\frac{dy}{dt}=f(x(t),y(t))\circ\frac{dx}{dt} \tag{6.1.6}$$

[在 $\mathscr{L}(G;F)$ 中取值的两个映射的等式]. 特别, 如果 t 是实变量, 并且如果映射

$$x=x(t), \quad y=y(t) \tag{6.1.7}$$

满足 (6.1.6) [在 F 中取值的两个映射的等式], 那么就说 (6.1.7) 是方程 (6.1.1) 的一条积分曲线.

6.2. 第一存在定理

用前面的记号, 设已给一点 $(x_0,y_0)\in U$. 我们要问, 在 $x_0\in E$ 的一个开邻域 V 内, 是否存在着一个解 $y=\varphi(x)$ 满足 $y_0=\varphi(x_0)$ [对于 $x=x_0$ 有初始值 y_0 的解]. 我们要看到, 一般说来, 这样的解不存在.

定理 6.2.1. 已给一点 $(x_0,y_0)\in U$, 存在着充分小的 $r>0$, 使得在球 $\|x-x_0\|<r$ 内, 存在着一个、并且只有一个 C^1 类映射 $\varphi(x)$ 在 F 中取值, 并且满足

$$\varphi(x_0)=y_0 \tag{6.2.1}$$

$$\boxed{\varphi'(x)\cdot(x-x_0)=f(x,\varphi(x))\cdot(x-x_0)} \quad \text{对于任何 } x. \tag{6.2.2}$$

注释. 条件 (6.2.2) 比条件 $\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$ 更容易达到, 而后者表明 φ 是 (6.1.1) 的一个解. 条件 (6.2.2) 只是表明: 在点 $x, \varphi'(x)$ 及 $f(x,\varphi(x))$ 是 $\mathscr{L}(E;F)$ 中两元素, 它们在 E 中与 $x-x_0$ 成比例的向量上取相同的值; 由此完全不能导出它们在 E 中所有向量上取相同的值, 而在 φ 是 (6.1.1) 的解的情形就应如此.

我们说满足 (6.2.2) 的映射 φ 是方程 (6.1.1) 的一个伪解. 定理 6.2.1 说, 对于已给初始值 (x_0,y_0), 在 x_0 的邻域中, 有一个并且只有一个伪解.

定理 6.2.1 的证明. 给出一个非零向量 $\xi\in E$, 并且考虑在 E 中的直线

$$x=x_0+t\xi, \quad t \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 中变动}.$$

求有下列形状的一条积分曲线 (参看 6.1 段末)

$$x=x_0+t\xi, \quad y=\psi(t), \tag{6.2.3}$$

而且 $\psi(0)=y_0$. 我们有 $dx/dt=\xi$, 从而表明 (6.2.3) 是积分曲线的条件是

$$\psi'(t)=f(x_0+t\xi,\psi(t))\cdot\xi. \tag{6.2.4}$$

换句话说, $y=\psi(t)$ 是 (对于 t 接近 0) (常) 微分方程

$$\frac{dy}{dt}=f(x_0+t\xi,y)\cdot\xi \tag{6.2.5}$$

对于 $t=0$ 取值 y_0 的解.

只要 $\|\xi\|\leqslant a$ ($a>0$ 充分小), 确知在整个区间 $-1\leqslant t\leqslant +1$ 中, 这个解 $\psi(t)$ 存在. 事实上, 既然 f 属于 C^1 类, 存在着数 $\rho>0, r>0, k$ 及 $M>0$, 使得

$$\|f(x,y)\|\leqslant M \quad 及\ \|f'_y(x,y)\|\leqslant k \quad 对于\ \|x-x_0\|\leqslant r, \|y-y_0\|\leqslant\rho$$

并且可假定 $\rho\leqslant Mr$ (只须减小 ρ). 取 $a=\rho/M$; 对于 $\|\xi\|\leqslant a$, 我们有

$$\|f(x_0+t\xi,y)\cdot\xi\|\leqslant Ma \quad 对于\ |t|\leqslant 1, \quad \|y-y_0\|\leqslant\rho;$$

因此确知解 $y=\psi(t)$ [满足 $\psi(0)=y_0$] 在区间 $|t|\leqslant\rho/(Ma)=1$ 中存在.

此后把 (6.2.5) 对 $t=0$ 取值 y_0 的解记作 $\psi(t,\xi)$; 它依赖于 $\xi\in E$. 既然 $f(x_0,+t\xi,y)\cdot\xi$ 对 (t,ξ,y) 属于 C^1 类, 我们知道 $\psi(t,\xi)$ 属于 C^1 类 (上编《微分学》, 第二章, 定理 3.6.1). 又如果我们用 λt 代替 t, 并且用 $(1/\lambda)\xi$ (实数 $\lambda\neq 0$) 代替 ξ , 方程 (6.2.5) 没有改变; 因此 $\psi(t,\xi)$ 只与乘积 $t\xi$ 有关:

$$\psi(t,\xi)=\psi(1,t\xi).$$

对于 $x=x_0+t\xi$ (ξ 固定, t 变), 关系式 (6.2.2) 等价于 (对于 $t\neq 0$)

$$\varphi'(x_0+t\xi)\cdot\xi=f(x_0+t\xi,\varphi(x_0+t\xi))\cdot\xi,$$

并且如果我们比较 (6.2.4), 就看出

$$\varphi(x_0+t\xi)=\psi(1,t\xi).$$

换句话说, 必须有

$$\boxed{\varphi(x)=\psi(1,x-x_0)}\,, \tag{6.2.6}$$

这就够了. 这样确定了 φ , 并且完成了定理 6.2.1 的证明.

6.3. 第二存在定理

剩下要解决下列问题: 微分方程 (6.1.1) 必须满足什么条件, 才能使定理 6.2.1 所确定的伪解是一个真解, 即对任何 $\eta\in E$ 及与 x_0 充分接近的任何 x, 我们有

$$\varphi'(x)\cdot\eta\ =f(x,\varphi(x))\cdot\eta.$$

定理 6.3.1. 要使伪解 φ 是一真解, 必须而且只须映射 f 满足下列条件: 对 (与 x_0 接近的) 任何 x, 元素

$$f'_x(x,\varphi(x))+f'_y(x,\varphi(x))\circ f(x,\varphi(x))\in\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E;F))$$

确定 $\mathscr{L}_2(E;F)$ 的一个对称元素 [在 $\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E;F))$ 及 $\mathscr{L}_2(E;F)$ 之间的标准双射对应中].

换句话说, 对任何 ξ 及 $\eta\in E$, 必须有

$$((f'_x+f'_y\circ f)\cdot\xi)\cdot\eta=((f'_x+f'_y\circ f)\cdot\eta)\cdot\xi \tag{6.3.1}$$

[约定映射 f, f'_x, f'_y 的值是在点 $(x,\varphi(x))$ 取的].

注释. 在每点 $(x,\varphi(x))$, f'_x 的值在 $\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E;F))$ 中, f 的值在 $\mathscr{L}(E;F)$ 中, f'_y 的值在 $\mathscr{L}(F;\mathscr{L}(E;F))$ 中, $f'_y\circ f$ 的值在 $\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E;F))$ 中, 由复合:

$$E\xrightarrow{f(x,\varphi(x))}F\xrightarrow{f'_y(x,\varphi(x))}\mathscr{L}(E;F).$$

既然 $f'_x+f'_y\circ f$ 在点 $(x,\varphi(x))$ 的值是 $\mathscr{L}(E;\mathscr{L}(E;F))$ 中一元素,

$$(f'_x+f'_y\circ f)\cdot\xi$$

的值在 $\mathscr{L}(E;F)$ 中; 因此可取它的值作为向量 $\eta\in E$, 并且求得 F 的一个元素: 即 (6.3.1) 的左边. 同样解释它的右边.

定理 6.3.1 的证明. (1) 要使 φ 是一个解, 条件 (6.3.1) 是必要的. 事实上, 假定

$$\varphi'(x)=f(x,\varphi(x)).$$

既然 $f(x,y)$ 及 $\varphi(x)$ 属于 C^1 类, 这关系式表明 φ 属于 C^2 类, 并且我们有

$$\varphi''(x)\cdot\xi=(f'_x+f'_y\circ\varphi')\cdot\xi.$$

由此把 $\varphi'(x)$ 换成 $f(x,\varphi(x))$:

$$\varphi''(x)\cdot\xi=(f'_x+f'_y\circ f)\cdot\xi,$$

从而

$$(\varphi''(x)\cdot\xi)\cdot\eta=((f'_x+f'_y\circ f)\cdot\xi)\cdot\eta.$$

然而这等式左边对 ξ 及 η 是对称的 (《微分学》, 第一章, 定理 5.1.1). 因此它的右边也是对称的: 由此得 (6.3.1). 证完.

下一段用来证明: 要使 φ 是一个解, 关系式 (6.3.1) 是充分条件.

6.4. 第二存在定理证明的终结

剩下来要证明: (2) 要使伪解 $\varphi(x)$ 是一真解, 条件 (6.3.1) 是充分的.

我们记得, 由 (6.2.2), 对于满足 $\|\xi\| \leqslant a$ 的任何 $\xi \in E$ 以及满足 $|t| \leqslant 1$ 的任何 $t \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\varphi'(x_0 + t\xi) \cdot \xi = f(x_0 + t\xi, \varphi(x_0 + t\xi)) \cdot \xi. \tag{6.4.1}$$

我们要证明: 在对 ξ 及 t 的同样假设下, 对任何向量 $\eta \in E$,

$$\varphi'(x_0 + t\xi) \cdot \eta = f(x_0 + t\xi, \varphi(x_0 + t\xi)) \cdot \eta. \tag{6.4.2}$$

固定 ξ 及 η , 考虑映射

$$H(t) = t\varphi'(x_0 + t\xi) \cdot \eta - tf(x_0 + t\xi, \varphi(x_0 + t\xi)) \cdot \eta \quad \text{对于 } |t| \leqslant 1.$$

这是在巴拿赫空间 F 中取值的一个映射. 只须证明: 对任何 $t, H(t) = 0$; 事实上, 对于 $t \neq 0$, 由关系式 $H(t) = 0$ 可推出 (6.4.2); 因此对于 $t \neq 0$, (6.4.2) 正确, 并且由连续性, 对于 $t = 0$, (6.4.2) 也是正确的.

为了证明 $H(t)=0$, 要证明映射 $H(t)$ 满足一个齐次线性微分方程; 由于 $H(0)=0$, 正好导出 H 恒等于零.

先证明 $H(t)$ 有导出映射 $H'(t)$, 为此, 我们记得 (参看 6.2 段)

$$\varphi(x_0 + t\xi) = \psi(t, \xi),$$

其中 ψ (作为 t 的映射) 是微分方程 (6.2.5)

$$\frac{dy}{dt} = f(x_0 + t\xi, y) \cdot \xi$$

的解, 它对 ξ 属于 C^1 类. 因此解 $\psi(t, \xi)$ 是参变量 ξ 的 C^1 类映射, 并且 $\partial\psi/\partial\xi$ 有关于 t 的导出映射, 使得

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}[f(x_0 + t\xi, \varphi(x_0 + t\xi)) \cdot \xi]$$

(参看《微分学》, 第二章, 定理 3.6.1). 然而我们有

$$H(t) = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \eta - tf(x_0 + t\xi, \varphi(x_0 + t\xi)) \cdot \eta; \tag{6.4.3}$$

因此 dH/dt 存在, 并且等于

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} = {} & \frac{\partial}{\partial \xi}[f(x_0 + t\xi, \varphi(x_0 + t\xi)) \cdot \xi] \cdot \eta \\ & - f(x_0 + t\xi, \varphi(x_0 + t\xi)) \cdot \eta \\ & - t((f'_x + f'_y \circ \varphi') \cdot \xi) \cdot \eta,\end{aligned} \tag{6.4.4}$$

这里约定 f'_x 表示 $f'_x(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi))$, f'_y 表示

$$f'_y(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi)),$$

并且 φ' 表示 $\varphi'(x_0+t\xi)$. 在 (6.4.4) 的右边, 由于 (6.4.1), 可以用 $(f'_y \circ f)\cdot\xi$ 代替 $(f'_y \circ \varphi')\cdot\xi$. 另一方面, 由给出双线性映射的导出映射的公式, 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi}[f(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi))\cdot\xi]\cdot\eta\\ =&\frac{\partial}{\partial\xi}[f(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi))\cdot\eta]\cdot\xi + f(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi))\cdot\eta\end{aligned}$$

代入 (6.4.4), 简化后得

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial}{\partial\xi}[f(\cdots)\cdot\eta]\cdot\xi - t((f'_x + f'_y\circ f)\cdot\xi)\cdot\eta. \tag{6.4.5}$$

明确计算:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}[f(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi))\cdot\eta] = t(f'_x + f'_y\circ\varphi')\cdot\eta;$$

另一方面,由假设(再看定理 6.3.1 的叙述):

$$((f'_x + f'_y\circ f)\cdot\xi)\cdot\eta \ = ((f'_x + f'_y\circ f)\cdot\eta)\cdot\xi,$$

最后:

$$\frac{dH}{dt} = t[(f'_y\circ(\varphi' - f))\cdot\eta]\cdot\xi = [(f'_y\circ(t\varphi' - tf))\cdot\eta]\cdot\xi, \tag{6.4.6}$$

并且因为由定义, $(t\varphi' - tf)\cdot\eta = H(t)$, 我们得到

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = (f'_y\circ H)\cdot\xi}\,. \tag{6.4.7}$$

(6.4.7) 的右边显然是 H 的连续线性映射 [我们记得 $H(t)$ 在巴拿赫空间 H 中取值, $f'_y\circ H$ 在 $\mathscr{L}(E;F)$ 中取值, 如同映射 f; (6.4.7) 的右边是 F 中的元素, 是 $f'_y\circ H$ 在向量 $\xi\in E$ 上的值].

于是如同前面所述, $H(t)$ 满足齐次线性微分方程 (6.4.7), 并且 $H(0)=0$. 可断定 $H(t)$ 恒等于零. 证完.

定理 6.3.1 的证明完成.

6.5. 基本定理

基本定理可由定理 6.3.1 立即导出. 总是采用 6.1 段中的假设: 考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{6.5.1}$$

其中 $f: U \to \mathscr{L}(E;F)$ 是已给的 C^1 类映射. 我们要求: 对任何点 $(x_0, y_0) \in U$, 这方程有对与 x_0 充分接近的 x 确定的、有初始值

$$\varphi(x_0) = y_0$$

的 (真) 解. 简单地说: 要求对于任何已给初始值 $(x_0, y_0) \in U$, 方程 (6.5.1) 有一局部解.

基本定理 6.5.1. 为了做到这一点, 必须而且只须对任何点 $(x,y) \in U$, 元素 $f'_x(x,y) + f'_y(x,y) \circ f(x,y) \in \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(E;F))$ 确定 $\mathscr{L}_2(E;F)$ 的一个对称元素; 即有: 对任何 $\xi, \eta \in E$ 及对任何点 $(x,y) \in U$,

$$((f'_x(x,y) + f'_y(x,y) \circ f(x,y)) \cdot \xi) \cdot \eta = ((f'_x(x,y) + f'_y(x,y) \circ f(x,y)) \cdot \eta) \cdot \xi. \quad (6.5.2)$$

这是定理 6.3.1 的明显的推论.

定义. 当条件 (6.5.2) 成立时, 我们说方程 (6.5.1) 是完全可积的.

注意 如果 E 是 1 维的, 方程总是完全可积的 (因为这时 ξ 及 η 必然成比例); 于是方程 (6.5.1) 是一常微分方程.

基本定理的补充 (不作证明). 固定 x_0, 让 y_0 变动: 设

$$y = \varphi(x, y_0) \quad (6.5.3)$$

是对 $x = x_0$ 取值 y_0 的解. 可以证明 $\varphi(x, y_0)$ 属于 C^1 类, 并且 $(\partial\varphi/\partial y_0)(x, y_0) \in \operatorname{Isom}(E;F)$; 于是可从 (6.5.3) 求出 [隐映射定理]:

$$y_0 = \psi(x,y), \quad (6.5.4)$$

其中 ψ 属于 C^1 类. 因此假定方程 (6.5.1) 完全可积, 在任何解 $y = \varphi(x)$ 上, 在 F 中取值的映射 $\psi(x,y)$ 是常量.

例. 假定 $E = \mathbb{R}^p, F = \mathbb{R}^{n-p}, U$ 是 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ 中的开集. 在 $\mathbb{R}^{n-p}$ 中取值的映射

$$\psi(x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_{n-p})$$

有 $n-p$ 个纯量分量 $\varphi_j(x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_{n-p})$; 它们在所有解

$$y_j = \varphi_j(x_1, \cdots, x_p) (1 \leqslant j \leqslant n-p)$$

上都是常量. 它们是 "首次积分".

6.6. 用微分形式的解释

保持在 6.1 段中的记号. 在该段中曾引进微分形式

$$\omega = dy - f(x,y)\cdot dx;$$

这是在开集 $U \subset E \times F$ 中确定、在 F 中取值的一个一次微分形式. 它的外微分是

$$d\omega = -df \wedge_{\Phi} dx,$$

这里 Φ 是典范双线性映射

$$\mathscr{L}(E;F) \times E \to F;$$

它对 (f,u) 联系着 $f \in \mathscr{L}(E;F)$ 在向量 $u \in E$ 上的值. 明确表出是:

$$d\omega = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right) \wedge_{\Phi} dx - \left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right) \wedge_{\Phi} dx.$$

在 $d\omega$ 中, 用 $f(x,y)\cdot dx$ 代替 dy; 就得到二次微分形式

$$\Omega = -\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\circ f\right)\cdot dx\right) \wedge_{\Phi} dx,$$

它在 F 中取值. 对于一对 $(\xi,\eta) \in E \times E, \Omega$ 的值是 (参看 2.2 段)

$$-\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\circ f\right)\cdot \xi\right)\cdot \eta + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\circ f\right)\cdot \eta\right)\cdot \xi.$$

完全可积条件 (6.2.2) 表明上式是零. 由此得:

定理 6.6.1. *要使方程*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

完全可积, 必须而且只须微分 2 形式 Ω (在 $d\omega$ 中用 $f(x,y)\cdot dx$ 代替 dy 求得) 恒等于零.

我们要在 E 及 F 有有限维情形表达这一条件. 取 $E = \mathbb{R}^p$, 把 $x_1,\cdots,x_p$ 记作 E 中一点的坐标; 又取 $F = \mathbb{R}^{n-p}$, 把 $x_{p+1},\cdots,x_n$ 记作 F 中一点的坐标. 于是 $x_1,\cdots,x_n$ 是 $E \times F = \mathbb{R}^n$ 中一点的坐标. 已给开集 $U \subset \mathbb{R}^n$, 映射 $f: U \to \mathscr{L}(E;F)$ 由 U 中 C^1 类数值函数 $f_{ij}(x_1,\cdots,x_n)$ 的矩阵 $\{f_{ij}(x)\}$ 所确定, 并且 (在 F 中取值的) 微分形式 ω 由取纯量值的 $n-p$ 个微分形式所确定:

$$\boxed{\omega_i = dx_i - \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x)dx_j, \quad p+1 \leqslant i \leqslant n}. \tag{6.6.1}$$

一个解 $y=\varphi(x)$ 由 $n-p$ 个 C^1 类函数确定:

$$x_i = \varphi_i(x_1,\cdots,x_p) \quad (p+1 \leqslant i \leqslant n) \tag{6.6.2}$$

以致 (6.6.2) 所确定的变量代换使 $n-p$ 个形式 ω_i 等于零. 换句话说, 这些 φ_i 必须满足

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = f_{ij}(x_1, \cdots, x_p, \varphi_{p+1}(x_1, \cdots, x_p), \cdots, \varphi_n(x_1, \cdots, x_p)) \qquad (6.6.3)$$

$(1 \leqslant j \leqslant p, p+1 \leqslant i \leqslant n)$. 这种方程组完全可积必须而且只须对于 $i = p+1, \cdots, n$, 在这些微分 2 形式 $d\omega_i$ 中, 用

$$\sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x) dx_j \quad (i = p+1, \cdots, n)$$

代替 dx_i 时, 这些微分 2 形式变成零; 事实上, 这就是定理 6.6.1 所断定的. 现在要明显表达这条件.

把一系列 p 个形式 $\omega_1, \cdots, \omega_p$ 添加到形式 $\omega_{p+1}, \cdots, \omega_n$, 使

$$\omega_1, \cdots, \omega_p, \omega_{p+1}, \cdots, \omega_n$$

成为微分 1 形式的一个基 (这就是: 任何微分 1 形式可唯一地写成 $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i(x)\omega_i$, 其中系数 $a_i(x)$ 是函数); 例如可取 $\omega_1 = dx_1, \cdots, \omega_p = dx_p$ (读者请证明: $dx_1, \cdots, dx_p, \omega_{p+1}, \cdots, \omega_n$ 成为微分 1 形式的一个基). 于是任何微分 2 形式 Ω 可唯一地写成

$$\Omega = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_{ij}(x) \omega_i \wedge \omega_j,$$

其中系数 b_{ij} 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数 [证明如同定理 2.6.2 的证明, 利用定理 1.7.1]. 要使得当在 Ω 中用 $\sum\limits_{j=1}^{p} f_{ij}(x)dx_j$ 代替 dx_i (对于 $i = p+1, \cdots, n$) 时, 也就是在其中对于 $p+1 \leqslant i \leqslant n$, 用 0 代替 ω_i 时, Ω 变成零, 必须而且只须当 i 及 j 两个指标都 $\leqslant p$ 时, 系数 $b_{ij}(x)$ 恒等于零. 应用这结果于 $d\omega_i (p+1 \leqslant i \leqslant n)$; 首先, 我们有

$$d\omega_i = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} c_{ijk}(x) \omega_j \wedge \omega_k,$$

而且完全可积条件从而由下式表出:

$$\boxed{c_{ijk}(x) = 0 \quad \text{对于} \quad i > p, j \leqslant p, k \leqslant p}.$$

我们要指出表述这些条件的一种简明的方法. 如果计算外乘积 $(d\omega_i) \wedge \omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n$ (对于 $i > p$), 我们得到

$$(d\omega_i) \wedge \omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant p} c_{ijk}(x) \omega_j \wedge \omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n,$$

因为如果整数 j 及 k 中至少有一个 $> p$, 外乘积 $\omega_j \wedge \omega_k \wedge \omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n$ 是零 (因乘积中有两因子相等). 因此完全可积条件可由下列条件表示出来:

$$\boxed{(d\omega_i) \wedge \omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n = 0 \quad \text{对于 } p+1 \leqslant i \leqslant n}. \qquad (6.6.4)$$

事实上, 任何微分 $(n-p+2)$ 形式可唯一地写成

$$\omega_{k_1} \wedge \omega_{k_2} \wedge \cdots \wedge \omega_{k_{n-p+2}} (1 \leqslant k_1 < \cdots < k_{n-p+2} \leqslant n)$$

的线性组合, 它的系数是 x 的函数; 要使这一形式是零, 必须而且只须它的所有系数是零.

在条件 (6.6.4) 中, 我们记得, 这些 ω_i 表示微分形式

$$dx_i - \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x) dx_j \quad (p+1 \leqslant i \leqslant n);$$

现假定在 $\omega_{p+1}, \cdots, \omega_n$ 上作一线性代换

$$\alpha_i = \sum_{j=p+1}^{n} u_{ij}(x) \omega_j,$$

对于任何 $x, u_{ij}(x)$ 的矩阵有行列式 $\neq 0$. 微分形式组 $\omega_i = 0 (p+1 \leqslant i \leqslant n)$ 与微分形式组 $\alpha_i = 0 (p+1 \leqslant i \leqslant n)$ 等价. 完全可积的条件等价于

$$d\alpha_i \wedge \alpha_{p+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_n = 0 \quad 对于\ p+1 \leqslant i \leqslant n. \tag{6.6.5}$$

事实上,

$$\alpha_{p+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_n = \det(u_{ij}(x)) \omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n,$$

从而 (6.6.5) 等价于

$$d\alpha_i \wedge \omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n = 0.$$

又有

$$d\alpha_i = \sum_j u_{ij} d\omega_j + \sum_j (du_{ij}) \wedge \omega_j,$$

从而

$$d\alpha_i \wedge \omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n = \sum_{j>p} u_{ij} \cdot d\omega_j \wedge \omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n.$$

因此由微分形式组 (6.6.4) 可导出 (6.6.5). 同样的论证也可按相反方向进行.

总之 (现在用 ω_i 来代替 α_i):

定理 6.6.2. 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一开集; 设 $(\omega_{p+1}, \cdots, \omega_n)$ 是 $n-p$ 个 U 中的 C^1 类、一次微分形式组, 而且在每点 $x \in U$, 微分形式组 $(\omega_{p+1}, \cdots, \omega_n)$ 的秩等于 $n-p$. 那么微分组

$$\omega_i = 0 \quad (p+1 \leqslant i \leqslant n)$$

["全微分方程" 组] 完全可积必须而且只须微分形式

$$d\omega_i \wedge \omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n \quad (p+1 \leqslant i \leqslant n)$$

恒等于零 (“弗罗贝尼乌斯条件”).

例. 设 ω 是 C^1 类、一次微分形式:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i,$$

其中系数 $a_i(x)$ 不同时为零. 要使方程 $\omega = 0$ 完全可积, 必须而且只须

$$\omega \wedge d\omega = 0.$$

[习题　证明这也是使 ω 具有 “积分因子” 的条件. 具有积分因子就是说, 存在着一个函数 $\mu(x) \neq 0$, 使得 1 形式 $\mu(x) \cdot \omega$ 是闭的.]

更特殊地, 对于 $n = 3$ (并且把 x, y, z 叫做 $\mathbb{R}^3$ 中一点的坐标), 设

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

要使方程 $\omega = 0$ 完全可积, 必须而且只须

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \tag{6.6.6}$$

[向量 (P, Q, R) 的场必须与它的 “旋量” 正交.] 事实上, 我们立即看出, (6.6.6) 的左边是形式 $\omega \wedge d\omega$ 的典范写法中 $dx \wedge dy \wedge dz$ 的系数.

习题

习题 1. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 是 $\mathbb{R}^n (p \leqslant n)$ 上的 p 个独立线性形式. 证明 $\mathbb{R}^n$ 上一个线性形式 α 满足

$$\alpha \wedge \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = 0,$$

必须而且只须它属于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ 所生成的空间.

证明: 如果这条件成立, 并且如果 $\alpha \neq 0$, 那么存在着一个交错线性 $p-1$ 形式 β, 使得

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = \alpha \wedge \beta.$$

习题 2. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中的微分 2 形式.

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

计算 $\bigwedge^{n} \omega$, 即 ω 的 n 个样本的外乘积.

习题 3. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 个独立的线性形式; 考虑交错双线性形式

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} \alpha_i \wedge \alpha_j,$$

其中 $a_{ij}, i<j$, 是 C_n^2 个已给实数.

(a) 证明: 如果 $a_{12} \neq 0$, 那么存在着两个线性形式 β_1 及 β_2, 使得 n 个线性形式 $\beta_1, \beta_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ 仍然线性无关, 并且使得 $\omega - \beta_1 \wedge \beta_2$ 可仅用 $\alpha_3, \cdots, \alpha_n$ 来表示.

由此递推导出: 存在着 $2r$ 个线性无关的形式, 使得

$$\omega = \beta_1 \wedge \beta_2 + \beta_3 \wedge \beta_4 + \cdots + \beta_{2r-1} \wedge \beta_{2r},$$

其中如果 n 是偶数, $r \leqslant n/2$; 如果 n 是奇数; $r \leqslant (n-1)/2$.

(b) 引进反对称矩阵 $A = (A_{ij})$, 其中 $A_{ij} = a_{ij}$ 对于 $i<j$. 证明 (a) 中所确定的数 $2r$ 等于矩阵 A 的秩, 并且它与基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 中形式的选取无关.

(c) 证明上述数 r 是使下式成立的最小整数 r:

$$\bigwedge^{r+1} \omega = 0.$$

由此导出 $\omega \wedge \omega = 0$ 必须而且只须 ω 是两个线性形式的外乘积.

习题 4. 设 $\omega \neq 0$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个线性形式, 并且设 α 是 $\mathbb{R}^n$ 上的交错 q 线性形式. 证明: 要存在着一个交错线性 $(q-1)$ 形式 β , 使得

$$\alpha = \omega \wedge \beta,$$

条件 $\omega \wedge \alpha = 0$ 是必要及充分的.

习题 5. 设 α 是 $\mathbb{R}^3$ 中的微分 1 形式

$$\alpha = ydx - xdy + dz.$$

(a) C^1 类函数 $u(x,y,z)$ 及 $v(x,y,z)$ 必须满足什么条件 (C), 才能使形式

$$\alpha - vdu$$

是闭的? 证明这时 u 及 v 与 z 无关.

(b) 能任意给出 $v = V(x,y)$ 吗?

(c) 证明如果 u 及 v 满足条件 (C), 三个微分形式 du, dv 及 $\alpha - vdu$ 在每点线性无关.

习题 6. 设

$$\omega = ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy$$

是 $\mathbb{R}^3$ 上的 C^∞ 类微分形式; 用 M_0 表示 $\mathbb{R}^3$ 中一点, 在这点, ω 不是零. 设 f 是在 M_0 的一邻域内确定, 并且属于 C^∞ 类的函数.

(a) 证明: 要使 ω 在 M_0 的邻域内可写成 $\alpha \wedge df$ 形状, 其中 α 在 M_0 的邻域内是 C^∞ 类微分 1 形式, 必须而且只须 df 在 M_0 不是零, 并且 f 是一个偏微分方程的解. 写出这一方程.

(b) 令 $\alpha = \lambda dx + \mu dy + \nu dz$; 把 λ, μ, ν 表示成 $a, b, c, \partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ 及 $\partial f/\partial z$ 的函数, 使得 $\alpha \wedge df = \omega$.

习题 7. 设 f 是在 $\mathbb{R}^n$ 中一点 $x^{(0)}$ 的开邻域 Ω 中的 C^2 类实值函数. 令 $u_i(x) = (\partial f/\partial x_i)(x)$, 并且设 φ 是映射 $x \mapsto u = (u_1, \cdots, u_n)$.

在什么条件下存在着 $x^{(0)}$ 的邻域 V, 使得 φ 是从 V 到 $\varphi(V)$ 上的一个微分同胚?

假定这条件成立, 并且对于任何 $u \in \varphi(V)$, 令 $x = \varphi^{-1}(u)$. 证明微分形式

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} x_i du_i$$

是闭的. 由此导出: 在 $u^{(0)} = \varphi(x^{(0)})$ 的一个邻域 V 中, 存在着一个 C^2 类函数 g, 使得 $x_i = \partial g/\partial u_i$.

证明如果 f 是 $p(\neq 1)$ 次齐次函数, 在 $\varphi^{-1}(U)$ 中, 我们有

$$g \circ \varphi = (p-1)f + \text{常数},$$

并且证明可选取 g 是齐次的, 次数是 $p/(p-1)$.

对于 $f(x) = x_1 x_2 x_3$, 确定 $g(u)$.

习题 8. 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 并且关于原点是星形集.

(a) 假定 $n = 3$, 并且设

$$\omega = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$$

是 U 中的一个 C^q 类 $(q \geqslant 1)$ 微分 2 形式. 明确表达命题 2.13.2 中的算子 k, 用来求得函数 P, Q, R, 使得

$$k(\omega) = P dx + Q dy + R dz.$$

(b) 现设 ω 是 U 中的 C^q 类微分 p 形式:

$$\omega = c(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p.$$

证明微分 $(p-1)$ 形式 $k(\omega)$ 有典范写法如下:

$$k(\omega) = a(x) \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_p,$$

其中

$$a(x) = \int_0^1 t^{p-1} c(tx) dt.$$

习题 9. 在 $\mathbb{R}^n$ 中除去原点, 考虑微分 $(n-1)$ 形式

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{x_i}{r^\alpha} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

(a) 怎样选择 α, 使得 $d\omega = 0$? 作了这样的选择后, 把 ω 在 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面上的积分表示为用 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ 的积分.

对于 $n = 2$ 及 $n = 3$ 计算上列积分.

(b) 假定 $n = 3$, 并且 α 取上一问题中确定的值. 应用上列习题中建立的公式, 在关于点 (0,0,1) 的星形开集中, 求出 ω 的原函数.

习题 10. 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中关于原点的星形开集, 并且 $X = (X_1, \cdots, X_n)$ 是 U 中的 C^1 类向量场.

对于 U 中任何 C^1 类 p 形式

$$\omega = \sum a_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

对应作出

$$i(X) \cdot \omega = \sum a_{i_1 \cdots i_p} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} X_{i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_k}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}, \quad \text{如果 } p \geqslant 1;$$

$$i(X) \cdot \omega = 0, \quad \text{如果 } p = 0.$$

(a) 证明: $i(X) \cdot i(X) = 0$, 并且对任何 p 形式 α ,

$$i(X) \cdot (\alpha \wedge \beta) = (i(X) \cdot \alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i(X) \cdot \beta.$$

令

$$X \cdot \omega = i(X) \cdot d\omega + d(i(X) \cdot \omega).$$

证明

$$X \circ i(X) = i(X) \circ X,$$

$$X \circ d = d \circ X,$$

$$X \cdot (\alpha \wedge \beta) = (X \cdot \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (X \cdot \beta).$$

(b) 以下我们更特别关心的是算子 X_0, 它与向量场 $X_0(x) = x$ 相连带.

证明

$$X_0 \cdot (a dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p) = \left(pa + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p.$$

设 h 是已给函数; 证明: 偏微分方程

$$pf + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = h$$

在 U 内有唯一的 C^1 类解, 它等于

$$h^*(x) = \int_0^1 h(tx_1, \cdots, tx_n) t^{p-1} dt.$$

由此导出, 已给 U 中次数 $\geqslant 1$ 的形式 ω_1, 那么存在着唯一的形式 ω, 使得 $X_0 \cdot \omega = \omega_1$; 令 $\omega = X_0^{-1} \cdot \omega_1$. 证明

$$X_0^{-1} \circ i(X_0) = i(X_0) \circ X_0^{-1},$$
$$d \circ X_0^{-1} = X_0^{-1} \circ d.$$

(c) 令

$$k(\omega) = (i(X_0) \circ X_0^{-1}) \cdot \omega \quad \text{对于 } p \geqslant 1,$$
$$k(\omega) = 0 \quad \text{对于 } p = 1.$$

证明

$$d(k(\omega) + k(d\omega)) = \omega \quad \text{对于 } p \geqslant 1.$$

并且证明 k 是命题 2.13.2 中的算子. 由此重新证明庞加莱定理.

习题 11. 计算由下列参变量方程所确定的环形的面积及体积:

$$\begin{cases} x = (a + R\cos\theta)\cos\varphi, \\ y = (a + R\cos\theta)\sin\varphi, \\ z = R\sin\theta, \end{cases}$$

其中 $R < a$.

习题 12. 在 $\mathbb{R}^3$ 中有一柱面, 它的母线与 oz 平行, 它的底是 $\mathbb{R}^2$ 中带边界的紧集 K 的边界 ∂K; 表述并证明对这柱面的斯托克斯定理.

习题 13. 设 $g = (g_1, \cdots, g_n)$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 中闭单位球的一个邻域到单位球面 S 的一个 C^2 类映射.

计算积分

$$\int_S g_1 dg_2 \wedge \cdots \wedge dg_n \quad \text{及} \quad \int_S x_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

(S 有通常的定向.) 由此导出: g 在 S 的限制不可能是恒等映射.

习题 14. 用 P, Q, R 表示 $\mathbb{R}^3$ 中开集 U 内的三个 C^1 类数值函数, 它们不同时为零; 并且我们令

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

(a) 证明在 U 中每点的邻域内, 存在着一对函数 u, v 满足

$$du \wedge \omega = 0, \quad dv \wedge \omega = 0, \quad du \wedge dv \neq 0,$$

并且证明如果 u, v 是这样一对函数, 那么存在着一个函数 λ, 使得

$$\omega = \lambda du \wedge dv.$$

由此导出: 在 U 中每点的邻域内, 存在着两个数值函数 g, h, 使得 $\omega = dg \wedge dh$, 必须而且只须 $d\omega = 0$.

(b) 设 f 是 U 内的 C^1 类数值函数, 它的偏导数 f'_x, f'_y, f'_z 不同时为零; 并且设 V_a 是由 $f(x,y,z) = a$ 隐含确定的流形 (曲面). 证明对于任何数 $a \in f(U)$, 以及充分小的开集 Ω , 有下列关系式

$$\text{由 } df \wedge \omega = 0 \quad \text{可导出} \quad \iint_{V_a \bigcap \Omega} \omega = 0.$$

有逆命题吗?

习题 15. 已给 $\mathbb{R}^3$ 中常数 a, b, c, 确定使下列微分形式保持不变的 $\mathbb{R}^3$ 中所有线性变换:

$$\omega = ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy.$$

习题 16. 考虑在 $\mathbb{R}^3$ 中的微分形式

$$\omega = xdy \wedge dz - 2zf(y)dx \wedge dy + yf(y)dz \wedge dx$$

其中 f 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的 C^1 类映射, 并且 $f(1) = 1$.

(a) 确定 f, 使 $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$. 对于这样选取的 f, 计算积分 $\int_S \omega$, 其中 S 表示定向的球冠面

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geqslant \sqrt{2}/2,$$

定向要使法线指向球面之外.

(b) 确定 f, 使得 $d\omega = 0$. 对于这样选取的 f, 再计算积分 $\int_S \omega$.

(c) 确定 f, 使得存在着形式 $\omega_1 = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy$, 其中

$$P(x,y,0) = Q(x,y,0) = 0,$$

并且 $d\omega_1 = \omega$. 这时计算 $\int_C \omega_1$, 其中 C 是定向圆周

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z = \sqrt{2}/2,$$

定向应使圆周是 S 的定向边界.

习题 17. 在 $\mathbb{R}^3$ 的原点 O 的一个邻域 V 中, 给出一个 C^3 类微分形式:

$$\omega = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

假定

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \neq 0.$$

(a) 在 O 的邻域内, 找出 C^2 类曲面

$$(S) z = f(x,y),$$

使得 ω 在 S 上引出的微分形式是闭的 [引出的形式是从 ω 出发作变量代换 $(x,y,z)\mapsto(x,y,f(x,y))$ 而得]. 证明 f 是一个偏微分方程的解, 写出它的特征方程组 (Γ).

(b) 证明在原点 O 的充分小的邻域内, 可作一微分同胚, 使 (Γ) 的积分曲线变成直线 $y=$ 常数, $z=$ 常数. 此后假定特征曲线是直线 $y=$ 常数, $z=$ 常数, 并且 ω 属于 C^2 类, 曲面 S 是怎样的? 证明在 O 的邻域内, 存在着一个 C^1 类函数 $T(y,z)$, 它在原点是零, 并使我们有

$$d\omega=\frac{\partial T}{\partial y}dy\wedge dz,\quad \text{以及}\quad \frac{\partial T}{\partial y}(0,0)\neq 0.$$

由此推得, 存在着一个 C^1 类函数 $U(x,y,z)$, 在原点是零, 并且满足

$$\omega=dU+T(y,z)dz. \tag{1}$$

(c) 此后假定 ω 由公式 (1) 给出, 其中 T 及 U 满足上述条件. 证明: 如果 $\partial U/\partial x\neq 0$, 方程 $\omega=0$ 不是完全可积.

在假设 $\partial U/\partial x\neq 0$ 下, 证明原点的一个邻域有 C^1 微分同胚

$$x=\lambda(X,Y,Z),\quad y=\mu(Y,Z),\quad z=Z,$$

使得 ω 经过这变量代换后, 变成 $dX+YdZ$.

习题 18. 设 $U\subset\mathbb{R}^3$ 是由 $\mathbb{R}^3$ 中满足 $xyz\neq 0$ 的点 (x,y,z) 所组成的开集; 在 U 内, 考虑形式

$$\omega=\frac{1}{yz}dx+\frac{1}{xz}dy+\frac{1}{xy}dz.$$

(a) 证明方程 $\omega=0$ 完全可积.

(b) 确定 ω 的一个积分因子, 也就是 U 中满足下式的一个 C^1 类函数 $f: d(f\omega)=0$ (可在给出 f 的偏微分方程中作函数代换 $\varphi=\log f$).

习题 19. a 及 b 是变量 x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2 的 C^1 类函数, 在什么条件 (2) 下, 方程组

$$\begin{cases}dz_1=adx_1+bdx_2,\\ dz_2=ady_1+bdy_2\end{cases} \tag{1}$$

完全可积?

在条件 (2) 下积出这方程组 [可求出把 z_1 与 z_2 表示成 a,b,x_1,x_2,y_1,y_2 的函数, 并可证明它们是 x_1,x_2,y_1,y_2 的线性函数.]

习题 20. 设 P 及 Q 是四个变量 x,y,u,v 的 C^1 类两函数. 在什么条件下, 方程组

$$\begin{cases}dx=Pdu-Qdv,\\ dy=Qdu+Pdv\end{cases}$$

完全可积?

令 $z=x+iy, \omega=u+iv, f(z,\omega)=P+iQ$. 证明: 特别如果 $f(z,\omega)$ 是 z 及 ω 的全纯函数, 上面的条件成立.

习题 21. *初步说明*: 一个巴拿赫空间 E 中开集 Ω 内的向量场是一个从 Ω 到 E 的映射; 如果它存在, 那么它在一点的导出映射是从 E 到 E 的一个线性映射.

在下面, Ω 是心为 x_0. 半径为 r 的一个开球.

(a) 设 U 是 Ω 中 C^1 类向量的场; 考虑方程 $dx/dt=U(x)$ 对 $t=0$ 取值 x_0 的解 $\varphi(t,x_0)$.

证明 φ 在 $t=0$ 的邻域中有二阶有限展式:

$$\varphi(t,x_0)=x_0+tU(x_0)+\frac{t^2}{2}U'(x_0)\cdot U(x_0)+o(t^2)$$

(b) 设 U 及 V 是 Ω 中对于 $x\in\Omega$ 满足下列条件的两个 C^1 类向量场: $\|U(x)\|\leqslant M$ 及 $\|V(x)\|\leqslant M$. 对于

$$\theta\in\left]-\frac{r}{4M},+\frac{r}{4M}\right[;$$

考虑 $dx/dt=U(t)$ 对于 $t=0$ 取值 x_0 的解, 并设这解对于 $t=\theta$ 取值 x_1, 考虑 $dx/dt=V(t)$ 对于 $t=0$ 取值 x_1 的解, 并设这解对于 $t=\theta$ 取值 x_2. 考虑 $dx/dt=-U(t)$ 对于 $t=0$ 取值 x_2 的解, 并设这解对于 $t=\theta$ 取值 x_3. 最后考虑 $dx/dt=-V(t)$ 对于 $t=0$ 取值 x_3 的解, 并设这解对于 $t=\theta$ 取值 x_4.

应用 x_i 的有限展式, 证明

$$x_4=x_0+\theta^2(V'(x_0)\cdot U(x_0)-U'(x_0)\cdot V(x_0))+o(\theta^2).$$

当 θ 在上面指出的区间内变化时, x_4 所描出的曲线在点 x_0 处的切线是什么?

(c) 假定 $[U,V](x)=V'(x)\cdot U(x)-U'(x)\cdot V(x)=0$ 对于任何 $x\in\Omega$. 应用弗罗贝尼乌斯定理, 证明在原点的邻域内存在着在 Ω 中取值的 C^2 类映射 $F(u,v)$, 使得

$$F(0,0)=x_0,\quad \frac{\partial F}{\partial u}(u,v)=U(F(u,v)),\quad \frac{\partial F}{\partial v}(u,v)=V(F(u,v)).$$

用 F 写出 x_1,x_2,x_3,x_4, 并且证明 $x_4=x_0$.

第二章　变分学原理

1.　问题的地位

1.1.　C^1 类曲线的空间

设 $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ 是一紧区间. 空间 $\mathbb{R}^n$ 中一条曲线 (以 $t\in I$ 作为参变量) 是一个映射

$$\varphi: I\to\mathbb{R}^n;$$

如果 φ 属于 C^k 类, 就说这曲线属于 C^k 类. 更一般地, 我们考虑在 ($\mathbb{R}$ 上的) 巴拿赫空间 E 中的曲线: 作为定义, 一条 C^1 类曲线是一个 C^1 类映射

$$\varphi: I\to E.$$

曲线集以明显的方式带一种 ($\mathbb{R}$ 上) 向量空间的结构. 我们要把这个向量空间记作 V (记号中不出现假设已经给定了的 E).

我们要在 V 上确定一种巴拿赫空间的结构. 为此, 必须在 V 上确定一个范数, 并且证明对于这种范数, V 是完备的.

定义.　对于 C^1 类 $\varphi: I\to E$, 令

$$\|\varphi\|=\sup_{t\in I}\|\varphi(t)\|+\sup_{t\in I}\|\varphi'(t)\|; \tag{1.1.1}$$

这是一个有限数, 因为 $t\mapsto\|\varphi(t)\|$ 及 $t\mapsto\|\varphi'(t)\|$ 是取值 $\geqslant 0$ 的连续映射, 从而它们在紧集 I 上有界. 读者可证明 $\|\varphi\|$ 正好是 V 上的一个范数.

命题 1.1.1.　带有 (1.1.1) 所确定的范数, 空间 V 是完备的.

证. 设 (φ_n) 是一柯西序列; 既然

$$\sup_{t\in I}\|\varphi_m(t)-\varphi_n(t)\|\leqslant\|\varphi_m-\varphi_n\|,$$

对于一致收敛的范数, 序列 $(\varphi_n(t))$ 也是一柯西序列; 因此 (由于 E 是完备的), φ_n 一致收敛于连续映射 $\varphi: I\to E$. 还要证明 φ 属于 C^1 类, 而且对于 V 的范数, φ 是序列 (φ_n) 的极限.

可是既然

$$\sup_{t\in I}\|\varphi'_m(t)-\varphi'_n(t)\|\leqslant\|\varphi_m-\varphi_n\|,$$

导出映射 φ'_n 的序列对于一致收敛的范数也是一个柯西序列. 因此 φ'_n 一致收敛于一个连续映射 ψ . 由上编《微分学》第一章的定理 3.6.1, φ 有导出映射 φ' 等于 ψ. 于是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}\|\varphi_n(t)-\varphi(t)\|=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}\|\varphi'_n(t)-\varphi'(t)\|=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi\|=0,$$

命题证完.

1.2. 曲线的泛函

此后假定在开集 $U\subset\mathbb{R}\times E\times E$ 中给出一个 C^k 类映射

$$F: U\to\mathbb{R}$$

将它在一点 $(t,x,y)\in U$ 的值记作 $F(t,x,y)$.

已给一条 C^1 类曲线 $\varphi: I\to E$, 使得对于 $t\in I$,

$$(t,\varphi(t),\varphi'(t))\in U, \tag{1.2.1}$$

我们将能把它附上一个实数

$$\int_a^b F(t,\varphi(t),\varphi'(t))dt.$$

这实数依赖于 φ; 把它记作 $f(\varphi)$:

$$f(\varphi)=\int_a^b F(t,\varphi(t),\varphi'(t))dt \tag{1.2.2}$$

如果我们把满足 (1.2.1) 的 $\varphi\in V$ 所组成的集记作 Ω, 那么由于 F, 就确定了一个映射

$$f:\Omega\to\mathbb{R}.$$

这是确定在映射集 Ω 上的一个映射, 或 (如过去所谓), 确定在函数集 Ω 上的一个"泛函". 我们要更详细地研究 f 这一映射.

命题 1.2.1. Ω 是巴拿赫空间 V 中一个开集.

证. 设 $\varphi_0 \in \Omega$; 我们要证明: 任何 $\varphi \in V$, 只要 $\|\varphi - \varphi_0\|$ 充分小, 它也属于 Ω. 设 $K(\subset U)$ 是从 I 到 Ω 的连续映射

$$t \mapsto (t, \varphi_0(t), \varphi_0'(t))$$

的像; 由于 I 是紧集, K 也是紧集. 因此存在着一个常数 $\rho > 0$, 使得满足

$$\|x - \varphi_0(t)\| \leqslant \rho, \quad \|y - \varphi_0'(t)\| \leqslant \rho$$

的任何点 $(t, x, y) \in I \times E \times E$ 属于 U (如果愿意, 也可用 I 的紧性作出直接证明). 于是设 $\varphi \in V$, 并且 $\|\varphi - \varphi_0\|_V \leqslant \rho$; 我们有: 由 V 中范数的定义, 对于任何 $t \in I$,

$$\|\varphi(t) - \varphi_0(t)\|_E \leqslant \rho, \quad \text{并且 } \|\varphi'(t) - \varphi_0'(t)\|_E \leqslant \rho.$$

因此我们正好有: 对于任何 $t \in I$,

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in U.$$

于是映射 $f: \Omega \to \mathbb{R}$ 在一个巴拿赫空间中的开集内确定, 并且问它是否属于 C^k 类是一个有意义的问题.

命题 1.2.2. 如果 $F: U \to \mathbb{R}$ 属于 C^k 类 $(k \geqslant 1)$, 那么 (1.2.2) 所确定的映射 $f: \Omega \to \mathbb{R}$ 也属于 C^k 类; 而且导出映射 f' 由下式给出:

$$f'(\varphi) \cdot u = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \cdot u(t) dt + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \cdot u'(t) dt, \qquad (1.2.3)$$

其中 $u \in V$.

[为了了解这个公式, 我们记得, 对于 $\varphi \in \Omega$, $f'(\varphi)$ 必须是 $\mathscr{L}(V; \mathbb{R})$ 中一个元素; 如果 u 是 V 的一个元素, u 是一个 C^1 类映射 $I \to E$, u' 表示导出映射, 并且对于 $t \in I$, $u(t)$ 及 $u'(t)$ 是 E 的元素. 至于 $(\partial F/\partial x)(t, \varphi(t), \varphi'(t))$, 这是 $\mathscr{L}(E; \mathbb{R})$ 中的一个元素. 在 (1.2.3) 的右边, 出现了这元素对 $u(t) \in E$ 的值. 同样, $(\partial F/\partial y)(t, \varphi(t), \varphi'(t))$ 是 $\mathscr{L}(E; \mathbb{R})$ 的一个元素, 并且取它在 $u'(t) \in E$ 上的值.]

命题 1.2.2 的证明. 首先证明如果 F 属于 C^1 类, f 有由公式 (1.2.3) 所给的导出映射 f'; 这公式表明了这一事实: 从 Ω 到 $\mathscr{L}(V; \mathbb{R})$ 的映射 $\varphi \to f'(\varphi)$ 是连续的 (习题: 证明这一事实); 这表明 f 属于 C^1 类.

为了证明, 要用积分号下微分法的引理 (第一章, 引理 2.12.2). 为此, 引进由

$$\lambda(\varphi, t) = F(t, \varphi(t), \varphi'(t))$$

所确定的映射

$$\lambda : \Omega \times I \to \mathbb{R}.$$

我们有

$$f(\varphi) = \int_a^b \lambda(\varphi, t) dt,$$

这是映射 λ 的一个积分; λ 依赖于在巴拿赫空间 V 中开集 Ω 内变动的"参变量" φ. 引理 2.12.2 告诉我们: 如果导出映射 $\partial\lambda/\partial\varphi$ 存在, 并且是 $(\lambda, t) \in \Omega \times I$ 的连续映射, 那么 f' 存在, 并且有

$$f'(\varphi) = \int_a^b \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}(\varphi, t) dt,$$

或同样有

$$f'(\varphi) \cdot u = \int_a^b \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}(\varphi, t) \cdot u\right) dt \quad \text{对于任何 } u \in V. \tag{1.2.4}$$

因此先证明导出映射 $\partial\lambda/\partial\varphi$ 存在, 然后计算它. 映射 λ 是一复合映射

$$\Omega \times I \xrightarrow{\mu} U \xrightarrow{F} \mathbb{R},$$

其中 $\mu(\varphi, t) = (t, \varphi(t), \varphi'(t))$; 由假设, F 属于 C^1 类, 因此只须证明 $\partial\mu/\partial\varphi$ 存在, 并且计算它. 在 $\mu(\varphi, t)$ 的三个分量中, 第一个 t 与 φ 无关; 第二个是 $\varphi(t)$, 它是 $\varphi \in V$ 的连续线性映射, 因此它有一个常量导出映射, 是 $\mathscr{L}(V; \mathbb{R})$ 中的元素, 并且这元素对于 $u \in V$ 的值是 $u(t)$; 最后, 第三个分量是 $\varphi'(t)$, 它是 $\varphi \in V$ 的连续线性映射 (由于在 V 上选取的范数), 因此它有一个常量导出映射, 是 $\mathscr{L}(V; \mathbb{R})$ 中的元素, 并且这元素对于 $u \in V$ 的值是 $u'(t)$. 于是由复合映射的导出映射公式, 就得到

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}(\varphi, t) \cdot u = \frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \cdot u(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \cdot u'(t); \tag{1.2.5}$$

它表明 $(\partial\lambda/\partial\varphi)(\varphi, t) \in \mathscr{L}(V; \mathbb{R})$ 正是 $(\varphi, t) \in \Omega \times I$ 的连续映射, 于是作为 (1.2.4) 及 (1.2.5) 的推论, 关系式 (1.2.3) 得证.

这引理还告诉我们, 如果 $\lambda(\varphi, t)$ 对 φ 是 k 次可微, 并且如果它的导出映射是 (φ, t) 的连续映射, $\int_a^b \lambda(\varphi, t) dt$ 是"参变量" φ 的 C^k 类映射. 命题 1.2.2 证完.

1.3. 例

从现在起给出一个很简单的例子 (还将看到其他例子). 设 $E = \mathbb{R}^n$; 取 $U = I \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$, 并且

$$F(t, x, y) = \sqrt{(y_1)^2 + \cdots + (y_n)^2}$$

(把 $x \in \mathbb{R}^n$ 的坐标记作 $(x_1, \cdots, x_n)$, 并且把 $y \in \mathbb{R}^n$ 的坐标记作 $(y_1, \cdots, y_n)$). F 属于 C^∞ 类 (因已除去 $y = 0$ 这个值). 集 Ω 是由满足下列条件的 C^1 类曲线 $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$

组成: 对于任何 $t \in I, \varphi'(t) \neq 0$. 我们有

$$f(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2} dt;$$

$f(\varphi)$ 就是曲线 φ 的弧长. 这是 $\varphi \in \Omega$ 的一个 C^∞ 类映射 (V 具有 1.1 段中所说明的范数).

1.4. 极小问题

满足下列条件的曲线 $\varphi : I \to E$ 的集:

$$\varphi(a) = \alpha, \qquad \varphi(b) = \beta$$

(其中 $\alpha \in E$ 及 $\beta \in E$ 是已给的) 是巴拿赫空间 V 的一个仿射子空间 $W(\alpha, \beta)$. 这是一个有余维数 2 的子空间, 因为对连续线性形式

$$\varphi \mapsto \varphi(a) \quad (\text{或 } \varphi \mapsto \varphi(b))$$

取定了一个值 α (或 β). 如果我们选取一个 $\varphi_0 \in W(\alpha, \beta), W(\alpha, \beta)$ 中任何元素可写成下列形式:

$$\varphi = \varphi_0 + \psi,$$

其中 $\psi \in W(0,0); W(0,0)$ 是一向量子空间. 于是 φ_0 确定从 $W(0,0)$ 到 $W(\alpha, \beta)$ 上的一个双射; 这是由平移

$$\psi \to \varphi_0 + \psi$$

所确定的一个双射.

$W(\alpha, \beta)$ 就是起点 (a, α) 及终点 (b, β) 已给定的 C^1 类曲线 $\varphi : I \to E$ 所组成的空间. 由于具有 V 的范数所导出的度量, $W(\alpha, \beta)$ 是完备空间. 我们要考虑集

$$W(\alpha, \beta) \bigcap \Omega = \Omega(\alpha, \beta),$$

它是 $W(\alpha, \beta)$ 中的一个开集. 而且我们考虑 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ 在 $\Omega(\alpha, \beta)$ 的限制; 如果 $F : U \to \mathbb{R}$ 属于 C^k 类, f 属于 C^k 类 (命题 1.2.2), 因此 f 在仿射空间 $W(\alpha, \beta)$ 中开集 $\Omega(\alpha, \beta)$ 的限制也属于 C^k 类.

[注意. 在巴拿赫空间 V 的闭仿射子空间中的开集内, 映射的微分法有意义, 因为通过平移, 可把这开集移到 V 的闭向量子空间中一个开集上, 而 V 本身是一个巴拿赫空间.]

考虑曲线 $\varphi_0 \in W(\alpha, \beta)$; 我们可以问, 局限在 $W(\alpha, \beta)$ 中, f 在 φ_0 是否达到相对极小? 也就是问, 对于与 φ_0 充分接近的任何 $\varphi \in W(\alpha, \beta)$, 是否有

$$f(\varphi) \geqslant f(\varphi_0)?$$

我们要对这种极小值给出一个必要条件. 我们知道 f 在 $W(\alpha,\beta)$ 的限制 $f_{\alpha,\beta}$ 有导出映射; 对于每个 $\varphi_0\in W(\alpha,\beta)$, $f_{\alpha,\beta}$ 的导出映射是 φ 的 "增量" u 的线性映射, 其中 $u\in W(0,0)$. 我们显然有: 对于 $u\in W(0,0)$,

$$f'_{\alpha,\beta}(\varphi_0)\cdot u=f'(\varphi_0)\cdot u.$$

换句话说, 导出映射 $f'_{\alpha,\beta}(\varphi_0)$ 是 $\mathscr{L}(W(0,0);\mathbb{R})$ 中的元素, 它是由 $f'(\varphi_0)\in\mathscr{L}(V;\mathbb{R})$ 在 V 中向量子空间 $W(0,0)$ 的限制导出.

由上编《微分学》第一章的命题 8.1.1, $f_{\alpha,\beta}$ 在 $\varphi_0\in W_{\alpha,\beta}$ 有相对极小的一个必要条件是

$$f'(\varphi_0)\cdot u=0\quad \text{对于任何 } u\in W(0,0);$$

换句话说, 在满足下列条件的任何向量 $u\in V$ 上: $u(a)=0$ 及 $u(b)=0$, $f'(\varphi_0)$ 为零.

定义. 当情况如上所述, 就说 φ_0 实现了 $f_{\alpha,\beta}$ 的一个极值; 也说在满足 $\varphi(a)=\alpha$ 及 $\varphi(b)=\beta$ 的曲线 $\varphi:I\to E$ 中, $\varphi_0:I\to E$ 是积分

$$\int_a^b F(t,\varphi(t),\varphi'(t))dt$$

的极值曲线①.

我们不讨论在什么条件下, 识别一条极值曲线实际给出上列积分的相对极小问题.

关系式 (1.2.3) 使我们能叙述下列定理:

定理 1.4.1. 要使 $\varphi\in W(\alpha,\beta)$ 是极值曲线, 必须而且只须对于属于 C^1 类并且满足下列条件的任何 C^1 类映射 $u:I\to E: u(a)=0$ 及 $u(b)=0$, 我们有

$$\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial x}(t,\varphi(t),\varphi'(t))\cdot u(t)+\frac{\partial F}{\partial y}(t,\varphi(t),\varphi'(t))\cdot u'(t)\right]dt=0. \tag{1.4.1}$$

1.5. 极值条件的变换

我们要变换定理 1.4.1 中的条件. 已给映射 φ, $(\partial F/\partial x)(t,\varphi(t),\varphi'(t))=A(t)$ 是在 $\mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ 中取值的已知连续映射; 同样, $(\partial F/\partial y)(t,\varphi(t),\varphi'(t))=B(t)$ 是在 $\mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ 中取值的已知连续映射. 问题如下: 连续映射 $A(t)$ 及 $B(t)$ 必须满足什么条件, 才能使得对于在 $t=a$ 及 $t=b$ 为零的任何 C^1 类映射 $u:I\to E$, 我们有

$$\int_a^b(A(t)\cdot u(t)+B(t)\cdot u'(t))dt=0? \tag{1.5.1}$$

答案如下:

①译者注: 所谓极值曲线 $\varphi:I\to E$ 不一定使上列积分取得极值, 只是满足 (1.4.1) 或欧拉方程 (1.5.2). 而这条件只是 φ 使有关积分取得极值的必要条件,而不是充分条件.

定理 1.5.1. 要使上述条件成立, 必须而且只须 $B(t)$ 有导出映射 $B'(t)$ 等于 $A(t)$.

我们立刻要证明这定理. 事先, 把它应用到我们关注的情形, 即下列情形:

$$A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t)), \quad B(t) = \frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)).$$

我们得到:

定理 1.5.2. 要使得 $\varphi \in W(\alpha, \beta)$ 是极值曲线, 必须而且只须 $(\partial F/\partial y)(t, \varphi(t), \varphi'(t))$ 是 t 的可导映射, 并且对任何 $t \in [a, b]$,

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t))}. \tag{1.5.2}$$

方程 (1.5.2) 有欧拉方程的名称; 它是确定极值曲线的方程.

现在来证明定理 1.5.1. 显然条件 $A(t) = B'(t)$ 是充分的, 因为既然 $u(a) = 0, u(b) = 0$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b (B'(t) \cdot u(t) + B(t) \cdot u'(t))dt &= \int_a^b \frac{d}{dt}(B(t) \cdot u(t))dt \\ &= B(b) \cdot u(b) - B(a) \cdot u(a) = 0.\end{aligned}$$

于是只要证明条件是必要的.

我们要给出必要性的两种证明: 第一种证明简单一些, 可是有一点不足之处, 因为在其中预先假定了 $\partial B/\partial t$ 存在. 在第二种证明中, 要证明 $\partial B/\partial t$ 实际存在.

第一种证明. 既然假定 $B'(t)$ 存在, 函数 $t \mapsto B(t) \cdot u(t)$ 可微. 于是 (1.5.1) 的左边可用分部积分法作变换: 得到

$$[B(t) \cdot u(t)]_a^b + \int_a^b (A(t) - B'(t)) \cdot u(t)dt = 0,$$

其中 $[B(t) \cdot u(t)]_a^b$ 表示 $B(b) \cdot u(b) - B(a) \cdot u(a)$. 这式是零, 因为假定了映射 $u: I \to E$ 对于 $t = a$ 及 $t = b$ 是零. 因此所求的条件是:对于满足 $u(a) = u(b) = 0$ 的任何 C^1 类映射 $u: I \to E$,

$$\int_a^b (A(t) - B'(t)) \cdot u(t)dt = 0. \tag{1.5.3}$$

于是只须证明下列引理:

引理 1.5.3. 设 $C: I \to \mathscr{L}(E; \mathbb{R})$ 是一连续映射, 而且对于 $t = a$ 及 $t = b$ 是零的任何 C^1 类映射 $u: I \to E$,

$$\int_a^b C(t) \cdot u(t)dt = 0,$$

那么 C 恒等于零.

引理 1.5.3 的证明. 用反证法, 假定 C 不恒等于零. 那么存在着一个 t_0, 使得

$$a < t_0 < b \quad \text{并且} \quad C(t_0) \neq 0.$$

既然 $C(t_0) \in \mathscr{L}(E;\mathbb{R}) \neq 0$, 存在着一个 $u_0 \in E$, 使得 $C(t_0) \cdot u_0 \neq 0$. 例如假定

$$C(t_0) \cdot u_0 > 0$$

(当上式左边 < 0 时, 可把 u_0 换成 $-u_0$). 既然 $C(t)$ 是 t 的连续映射, 对于 $|t-t_0| \leqslant \varepsilon$ (适当取 $\varepsilon > 0$, 假定使得 $a \leqslant t_0 - \varepsilon < t_0 + \varepsilon \leqslant b$), 我们有

$$C(t) \cdot u_0 > 0.$$

然而存在着一个 C^∞ 类函数 $\lambda : I \to \mathbb{R}^+$, 它的支撑集包含在 $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ 内, 并且它在 $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ 中 > 0 (参看第一章, 4.1 段, 引理 1). 取 $u(t) = \lambda(t)u_0$ (纯量 $\lambda(t)$ 乘向量 $u_0 \in E$ 的积) 所确定的映射作为映射 $u : I \to E$. 我们有: 对于任何 $t \in I$,

$$C(t) \cdot u(t) \geqslant 0,$$

并且对于 $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$,

$$C(t) \cdot u(t) > 0.$$

于是积分 $\int_a^b C(t) \cdot u(t)dt > 0$, 与假设相矛盾; 我们得到了所寻求的矛盾. 因此引理 1.5.3 成立.

第二个证明 (完整的). 设 $A_1(t)$ 是 $A(t)$ 的原映射, 它对于 $t = 0$ 是零:

$$A_1(t) = \int_0^t A(\tau)d\tau.$$

我们有

$$A(t) \cdot u(t) = A_1'(t) \cdot u(t) = \frac{d}{dt}(A_1(t) \cdot u(t)) - A_1(t) \cdot u'(t).$$

由此得

$$\int_a^b (A(t) \cdot u(t) + B(t) \cdot u'(t))dt = [A_1(t) \cdot u(t)]_a^b + \int_a^b (B(t) - A_1(t)) \cdot u'(t)dt.$$

我们要使对于在 $t = a$ 及 $t = b$ 时取值零的任何 C^1 类映射 $u : I \to E$, 上式是零. 映射 u' 是满足下式的连续映射 $v : I \to E$

$$\int_a^b v(t)dt = 0; \tag{1.5.4}$$

反过来, 这样的 v 是满足 $u(a)=0$ 及 $u(b)=0$ 的一个映射 u 的导出映射. 因此要寻求的条件是: 对于满足 (1.5.4) 的任何连续映射 $v: I \to E$,

$$\int_a^b (B(t)-A_1(t))\cdot v(t)dt = 0. \tag{1.5.5}$$

我们要证明下列引理:

引理 1.5.4. 设 $D: I \to \mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ 是一连续映射, 并且对于满足 $\int_a^b v(t)dt=0$ 的任何连续映射 $v: I\to E$, 我们有

$$\int_a^b D(t)\cdot v(t)=0.$$

那么 D 是一常数.

如果暂时承认这一引理, 它就告诉我们, 在所研究的情况下, 我们有

$$A_1(t)=B(t)+\text{常数},$$

这正好表明 $B(t)$ 的导出映射等于 $A(t)=A_1'(t)$. 于是完成了定理 1.5.1 的第二个证明.

还剩下证明引理 1.5.4. 还是用反证法: 如果 $D(t)$ 不是常量, 存在着 t_1 及 t_2, 使得

$$a<t_1<t_2<b, \quad D(t_1)\neq D(t_2).$$

设 $u_0\in E$ 使得 $D(t_1)\cdot u_0\neq D(t_2)\cdot u_0$; 可假定 $D(t_1)\cdot u_0>D(t_2)\cdot u_0$. 设 α_1 及 $\alpha_2\in\mathbb{R}$, 使得 $D(t_1)\cdot u_0>\alpha_1>\alpha_2>D(t_2)\cdot u_0$. 对于充分小的 $\varepsilon>0$, 我们有

$$\begin{cases} D(t)\cdot u_0>\alpha_1 & \text{对于 } |t-t_1|\leqslant\varepsilon, \\ D(t)\cdot u_0<\alpha_2 & \text{对于 } |t-t_2|\leqslant\varepsilon, \end{cases} \tag{1.5.6}$$

并且可假定 ε 充分小, 使得

$$a\leqslant t_1-\varepsilon<t_1+\varepsilon\leqslant t_2-\varepsilon<t_2+\varepsilon\leqslant b.$$

设 $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ 是一个 C^∞ 类函数; 对于 $t\leqslant-\varepsilon$ 及 $t\geqslant\varepsilon$ 它是零; 对于 $-\varepsilon<t<\varepsilon, \lambda(t)>0$ (参看第一章, 4.1 段) 函数

$$\mu(t)=\lambda(t-t_1)-\lambda(t-t_2)$$

属于 C^∞ 类, 满足 $\int_a^b \mu(t)dt=0$, 对于 $t_1-\varepsilon<t<t_1+\varepsilon$, 它 >0; 对于 $t_2-\varepsilon<t<t_2+\varepsilon$, 它 <0; 在其他点处, 它是零. 令

$$v(t)=\mu(t)\cdot u_0;$$

这是一个连续映射 $I \to E$; 我们有 $\int_a^b v(t)dt = 0$, 又有

$$\int_a^b D(t)\cdot v(t)dt = \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \lambda(t-t_1)(D(t)\cdot u_0)dt - \int_{t_2-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} \lambda(t-t_2)(D(t)\cdot u_0)dt;$$

由不等式 (1.5.5), 我们有

$$\begin{aligned}\int_a^b D(t)\cdot v(t)dt &> \alpha_1 \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \lambda(t-t_1)dt - \alpha_2 \int_{t_2-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} \lambda(t-t_2)dt \\ &> (\alpha_1-\alpha_2)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \lambda(t)dt > 0,\end{aligned}$$

与假设相矛盾. 由此得到了寻求的矛盾, 从而引理 1.5.4 成立.

这样就完成了定理 1.5.1 的证明.

1.6. 对于极值曲线 $f'(\varphi)\cdot u$ 的计算

在上一段中, 找到了欧拉方程; 它显示出极值曲线 φ 的特性, 表明对于在 $t=a$ 及 $t=b$ 为零的任何 C^1 类映射 $u: I \to E$,

$$f'(\varphi)\cdot u = 0.$$

现在让假设 $u(a)=0$ 及 $u(b)=0$ 除去. 用 1.5 段中的记号, 我们有

$$f'(\varphi)\cdot u = \int_a^b (A(t)\cdot u(t) + B(t)\cdot u'(t))dt;$$

已知对于一条极值曲线, 我们有 $A(t)=B'(t)$, 因此

$$f'(\varphi)\cdot u = B(b)\cdot u(b) - B(a)\cdot u(a)$$

(如果 $u(a)=0, u(b)=0$, 那么上式正好是零). 总之, 只要 $\varphi: I\to E$ 是一极值曲线, 我们有

$$\boxed{f'(\varphi)\cdot u = \frac{\partial F}{\partial y}(b,\varphi(b),\varphi'(b))\cdot u(b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a,\varphi(a),\varphi'(a))\cdot u(a)}\,. \tag{1.6.1}$$

这公式表明 $f'(\varphi)\cdot u$ 与映射 u 怎样相关; 它只与这映射对于 $t=a$ 及 $t=b$ 的值相关.

如果 φ 不是极值曲线, 那么相反地, $f'(\varphi)\cdot u$ 的计算中一般要出现映射 $u(t)$ 对于所有 $t\in[a,b]$ 的值. 事实上 (如 1.5 段中计算所表明的), 至少如果 $\varphi: I\to E$ 使得变量 t 的映射 $(\partial F/\partial y)(t,\varphi(t),\varphi'(t))$ 有连续的导出映射, 我们有

$$\begin{aligned}f'(\varphi)\cdot u = &\frac{\partial F}{\partial y}(b,\varphi(b),\varphi'(b))\cdot u(b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a,\varphi(a),\varphi'(a))\cdot u(a) \\ &+ \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(t,\varphi(t),\varphi'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}(t,\varphi(t),\varphi'(t))\right]\cdot u(t)dt.\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

2. 欧拉方程的研究: 极值曲线的存在性. 例

2.1. $E=\mathbb{R}^n$ 情形下的欧拉方程

这时 E 中一点 x (或 y) 由 n 个实数坐标 $x_1,\cdots,x_n$ (或 $y_1,\cdots,y_n$) 确定. 函数

$$F(t,x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$$

在开集 $U\subset\mathbb{R}^{2n+1}$ 中确定, 并且属于 C^k 类 $(k\geqslant 1)$.C^1 类曲线 $\varphi:I\to\mathbb{R}^n$ 由 n 个 C^1 类数值函数 $\varphi_i(t)$ 确定; 如果对于任何 $t\in I$,

$$(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t),\varphi_1'(t),\cdots,\varphi_n'(t))\in U$$

就说 φ 属于开集 Ω. 我们把下列积分与 φ 联系着:

$$f(\varphi)=\int_a^b F(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t),\varphi_1'(t),\cdots,\varphi_n'(t))dt.$$

表明极值曲线特性的欧拉方程 (1.5.2) 在这里等价于含 n 个纯量方程的方程组:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)=\frac{\partial F}{\partial x_i},\quad 1\leqslant i\leqslant n \tag{2.1.1}$$

这里约定 $\partial F/\partial x_i$ 表示函数

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(t,\varphi_1(t),\cdots,\varphi_n(t),\varphi_1'(t),\cdots,\varphi_n'(t)),$$

并且对 $\partial F/\partial y_i$ 也作同样约定.

我们要阐明这方程组, 假定 F 属于 C^2 类, 而且所考虑的极值曲线 φ 也属于 C^2 类 [我们立刻 (参看命题 2.1.1) 可看到, 在关于 F 的适当的假设 F, 所有的极值曲线实际上属于 C^2 类]. 通过复合 (x_i 用 $\varphi_i(t)$ 代替, y_i 用 $\varphi_i'(t)$ 代替), $\partial F/\partial y_i$ 是 t 的函数, 从而由复合函数的求导公式得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)=&\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial y_i}(t,\varphi(t),\varphi'(t))+\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial y_i}(t,\varphi(t),\varphi'(t))\cdot\varphi_j'(t)\\&+\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 F}{\partial y_j\partial y_i}(t,\varphi(t),\varphi'(t))\cdot\varphi_j''(t).\end{aligned}$$

可见欧拉方程可写成含 n 个 t 的未知函数 $x_1,\cdots,x_n$ 的常微分方程组 [写出 x_i' 代替 y_i]:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial x_i'}(t,x,x')+\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 F}{\partial x_j\partial x_i'}(t,x,x')\cdot x_j'+\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 F}{\partial x_j'\partial x_i'}(t,x,x')\cdot x_j''\\&=\frac{\partial F}{\partial x_i}(t,x,x')\quad \text{对于 } 1\leqslant i\leqslant n.\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

现假设对于 $(t,x,x')\in U$, 行列式

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i'\partial x_j'}(t,x,x')\right) \tag{2.1.3}$$

是 $\neq 0$. 那么方程组 (2.1.2) 可解成下列形式:

$$x_i''=G_i(t,x_1,\cdots,x_n,x_1',\cdots,x_n') \quad (1\leqslant i\leqslant n), \tag{2.1.3'}$$

这里如果 F 属于 C^k 类, G_i 就属于 C^{k-2} 类.

命题 2.1.1 如果行列式 (2.1.3) $\neq 0$, 并设 F 属于 C^2 类, 那么所有极值曲线

$$x_i=\varphi_i(t)$$

属于 C^2 类.

证. 写出

$$z_i=\frac{\partial F}{\partial y_i}(t,x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n),\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{2.1.4}$$

n 个函数 $z_1,\cdots,z_n$ 关于 $y_1,\cdots,y_n$ 的雅可比行列式是 $\det(\partial^2F/\partial y_i\partial y_j)$; 由假设, 它 $\neq 0$. 因此在一点 $(t,x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)$ 的邻域内, 可应用隐映射定理, 得

$$y_i=G_i(t,x_1,\cdots,x_n,z_1,\cdots,z_n),\quad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{2.1.5}$$

这里 G_i 属于 C^1 类. 为了写出欧拉方程, 必须首先表明 y_i 是 x_i 对变量 t 的导出映射, 然后

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right)=\frac{\partial F}{\partial x_i};$$

因此极值曲线是下列方程组的解:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i}{dt}=G_i(t,x_1,\cdots,x_n,z_1,\cdots,z_n)\\[2mm] \dfrac{dz_i}{dt}=\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(t,x_1,\cdots,x_n,G_1(t,x,z),\cdots,G_n(t,x,z))\end{cases} \tag{2.1.6}$$

即含 $2n$ 个变量 t 的未知函数 x_i 及 z_i 的 C^1 类微分方程组的解. 因而对于每条极值曲线, x_i 及 z_i 都是 t 的 C^1 类函数; 由 (2.1.5), y_i 是 t 的 C^1 类函数, 并且由于 $y_i=dx_i/dt$, 可看出对于任何极值曲线, $x_i(t)$ 是 C^2 类函数. 证完.

总是假定 F 属于 C^2 类, 并且行列式 (2.1.3) $\neq 0$, 可对方程组 (2.1.6) 应用微分方程组的存在与唯一性的局部定理: 通过一点 $(t,x_1,\cdots,x_n)$ 有一条并且只有一条极值曲线, 使得对于 $t=t_0, dx_i/dt$ 取给定的值.

2.2. 例

初步说明: 在上面 2.1 段的范围内 (即 $E = \mathbb{R}^n$ 情形), 假定对于一个 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$, 函数 $F(t, x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$ 与 x_i 无关, 即 $\partial F/\partial x_i = 0$. 欧拉方程 (2.1.1) 于是表明: 在任何极值曲线上, $(\partial F/\partial y_i)(t, \varphi(t), \varphi'(t))$ 是常数. 换句话说, $(\partial F/\partial y_i)(t, x, y)$ 是极值曲线的微分方程组的首次积分.

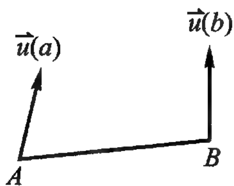
第一例. 设 $F = \sqrt{(y_1)^2 + \cdots + (y_n)^2}$. 这是 $\mathbb{R}^n$ 中对于长度的极值曲线问题, 因为

$$\int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2}dt$$

正是 C^1 类曲线 $\varphi: I \to \mathbb{R}^n$ 的弧长. 在这例中, 对于任何 $i, \partial F/\partial x_i = 0$; 因此对于任何 i,

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{y_i}{\sqrt{(y_1)^2 + \cdots + (y_n)^2}}$$

在每条极值曲线上是常数. 换句话说, 极值曲线的切向量的方向余弦是常数. 这表明极值曲线的切线有不变的方向: 如我们所预期的, 极值曲线是 $\mathbb{R}^n$ 中的直线. 我们可应用公式 (1.6.1) 计算直线上线段长的 "无穷小变分", 表示为线段端点的 "无穷小变分" 的映射: 在这公式中, 向量 $u(a)$ 及 $u(b)$ 确定直线上线段端点 A 及 B (与参数 t 的值 a 及 b 相对应) 的无穷小位移; (1.6.1) 的右边等于向量 $\overrightarrow{u(a)}$ 及 $\overrightarrow{u(b)}$ 在线段 $\overline{AB}$ 上正交射影的差 ("约瑟夫 · 贝特朗公式").



第二例. 更一般地, 设

$$F = \alpha(x)\sqrt{(y_1)^2 + \cdots + (y_n)^2},$$

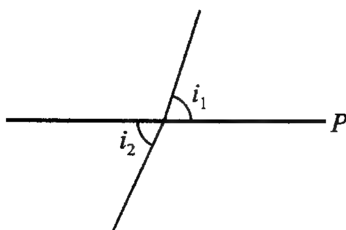
其中 $\alpha(x)$ 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的 C^k 类函数 (k 可任意大). 如果 α 与变数中的一个 x_i 无关, 那么

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \alpha(x)\frac{y_i}{\sqrt{(y_1)^2 + \cdots + (y_n)^2}}$$

在每条极值曲线上是常数: 极值曲线的切线所带长度向量 $\alpha(x)$ 在第 i 个坐标轴上的投影是常量. 这一变分问题特别在研究光在 "各向同性" 介质中传播路线时出现: "各向同性" 表示在每点, 光在所有方向传播的速度相同; 它与介质在这点的指数成反比. 这指数是点的函数 (取数值 > 0); 假定它足够多次可微, 并且与时间无关. 积分 $\int F dt$ 应理解为 $\int \frac{ds}{v}$, 其中 ds 是所考虑的曲线的弧元素, v 是光线在介质中所考虑点处速度; 因此积分等于光传播的时间. 然而费马原理告诉我们, 光传播的路线

使传播的时间达到极小. 因此这些路线是问题的极值曲线. 上述规律告诉我们, 如果介质的指数 (例如) 与 x_1 无关, 那么光线切线所带向量等于在切点处指数, 而沿着光线传播方向, 它在 x_1 轴上的投影是常量. 由此 (通过取极限) 容易再推导出笛卡儿折射定律: 当介质是由平面 P 所分开的两种均匀物质组成时, 如果 n_1 及 n_2 表示两个常数指数, i_1 及 i_2 表示光线与 P 所夹的两个角, 我们有

$$\frac{1}{n_1}\cos i_1=\frac{1}{n_2}\cos i_2.$$



这里举出第二例中一种令人重视的特别情形. 对于 $n=2$, 取

$$\alpha(x)=(x_2)^k \tag{2.2.1}$$

并在半平面 $x_2>0$ 内进行讨论 (x_1 及 x_2 是坐标), k 是指数. 我们有: 在每条极值曲线上,

$$(x_2)^k\frac{x_1'}{\sqrt{x_1'^2+x_2'^2}}=\text{常数},$$

这样就可实际确定极值曲线. 作为习题, 请读者明确讨论下列几个情形:

$k=-1$ 情形; 问题在于半平面 $x_2>0$ 中的 $\displaystyle\int\frac{ds}{x_2}$. 这是 "庞加莱半平面" 中罗巴契夫斯基几何情形. 极值曲线是心在轴 Ox_1 上的圆弧; 它们实际给出了积分的极小.

$k=+1$ 情形; 问题在于 $\displaystyle\int x_2ds$. 极值曲线是 "悬链线" $x_2=a\mathrm{Ch}(x_1/a+$ 常数). 这问题在求极小面积的旋转面时出现.

$k=-\dfrac{1}{2}$ 情形; 问题在于 $\displaystyle\int\frac{ds}{\sqrt{x_2}}$. 当在半平面 $x_2>0$ 上, 寻求满足下列条件的曲线 C 的弧时, 这问题会出现: 一个重质点 (坐标轴 Ox_2 指向重力的方向) 以速度 $v=\sqrt{2gx_2}$ 在没有摩擦力的 C 上运动, 使通行的时间最短. 极值曲线是旋轮线的弧, 歧点在 Ox_1 轴上.

$k=\dfrac{1}{2}$ 情形; 问题在于 $\displaystyle\int\sqrt{x_2}ds$. 在指向 Ox_2 轴方向的重力作用下, 在抛射体以等于 $\sqrt{2gx_2}$ 的初速所作抛物线运动时, 这一问题要出现.

2.3. 力学中的拉格朗日方程

考虑一个物质系统, 其中各种可能的位置以有限个参变量 (纯量) $q_1,\cdots,q_n$ 为标志. 例如由有限个自由质点所构成系统的情形就是这样; 更一般地, 由所谓有 "完

整" 联系的一些固体所构成的有限系统情形也是这样 [有限个固体系统的位置依赖于有限个参变量. 如果在这些固体之间有 "联系", 那么在这些参变量之间有 "关系式"; 它们可能是参变量的函数之间的微分关系式, 等式, 或不等式. "完整" 情形是这样的情形: 固体之间的联系局部地表现为一些参变量是假设互不相关的另一些参变量的函数].

如果参变量 q_i 是时间 t 的可微函数, 系统在时刻 t 的动能 $2T$ 可表示为 $t, q_1, \cdots, q_n$ 以及导数 $q_i' = dq_i/dt$ 的函数. 对于固定的 $t, q_1, \cdots, q_n$, 这函数是 $q_1', \cdots, q_n'$ 的二次函数. 在好的情形下, 它是 q_i' 的二次齐次函数; 一般地, 我们有

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

其中 T_2 是二次齐次多项式, T_1 是线性 (齐次) 函数, 并且 T_0 与这些 q_i' 无关.

假定在每一时刻, 物质系统受到与力函数 $U(t, q_1, \cdots, q_n)$ 有关的力系统作用: 这表明如果固定在时刻 t 作用力的系统, 那么当物质系统从一个位置 $(q_1^0, \cdots, q_n^0)$ 到另一位置 $(q_1^1, \cdots, q_n^1)$ 时, 它所作的 "功" 等于 $U(t, q_1^1, \cdots, q_n^1) - U(t, q_1^0, \cdots, q_n^0)$. 于是力学基本原理断定: *物质系统随时间的变化由曲线 $t \mapsto (q_1(t), \cdots, q_n(t))$ 确定. 而这曲线是积分*

$$\int (T + U) dt$$

的极值函数. 这积分叫做 "作用积分", 而且这原理失去了哈密顿 "*最小作用原理*" 这一名称.

因此写出有关问题的欧拉方程就得到物质系统的发展方程. 在这里 $F = T + U$, 变量 $x_1, \cdots, x_n$ 叫做 $q_1, \cdots, q_n$. 考虑到 U 与 $q_1', \cdots, q_n'$ 无关, 欧拉方程可写成

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{2.3.1}$$

这就是力学中经典的 "拉格朗日方程".

2.4. 回到一般情形: $F(t, x, y)$ 与 t 无关情形

现在求 $\int F(x, y) dt$ 的极值曲线, 其中 F 在开集 $U \subset E \times E$ 内属于 C^1 类.

定理 2.4.1. 如果 F 与 t 无关, 函数 $(\partial F/\partial y) \cdot y - F$ (在 $\mathbb{R}$ 中取值) 在每条极值曲线上是常数.

证. 自然, $(\partial F/\partial y)(x, y) \cdot y$ 表示元素 $(\partial F/\partial y)(x, y) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R})$ 在向量 $y \in E$ 上的值. 必须证明: 当 $t \to \varphi(t)$ 是极值曲线时, 复合函数

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(t), \varphi'(t)) \cdot \varphi'(t) - F(\varphi(t), \varphi'(t))$$

关于 t 的导数是零. 由双线性函数的求导数法 (把这法应用于 $(\partial F/\partial y)\cdot y$, 因为它是 $\partial F/\partial y$ 及 y 的双线性函数), 我们有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y\right)-\frac{dF}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\cdot y+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}, \tag{2.4.1}$$

其中 x 用 $\varphi(t)$ 代替, y 用 $dx/dt=\varphi'(t)$ 代替; 另一方面, 我们有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\quad (\text{欧拉方程}),$$

终于得 (2.4.1) 的右边是零.

当 F 是 y 的 n 次齐次多项式 (对每个 x) 时, 我们有

$$\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y=nF; \tag{2.4.2}$$

这是经典的欧拉恒等式, 可如下求得: 写出

$$F(x,\lambda y)=\lambda^n F(x,y),$$

然后写出上式两边对于 λ 的导数在 $\lambda=1$ 时相等.

例. 在力学中, 如果 U 及 T 与 t 无关, 并且如果写出

$$T=T_2+T_1+T_0,$$

其中 T_2 是 q_i' 的二次齐次多项式, T_1 是 q_i' 的一次齐次多项式, 并且 T_0 与 q_i' 无关, 我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial q_i'}q_i'-F=(2T_2+T_1)-(T_2+T_1+T_0+U)=T_2-T_0-U.$$

由此得*动能定理* (在班勒卫的推广形式下): 如果 T 及 U 与 t 无关, 那么在每条轨线上, T_2-T_0-U 是常量.

2.5. $F(x,y)$ 是 y 的二次齐次式情形

定理 2.4.1 告诉我们: *在每条极值曲线上*, $F(\varphi(t),\varphi'(t))$ *是常数*. 此后还假定: 对于每个 $x, F(x,y)$ 是 y 的*非退化正二次形式* (参看《微分学》, 第一章, §8). 那么我们可考虑函数 $G(x,y)=\sqrt{F(x,y)}$; 如果 F 属于 C^k 类, 那么在任何点 (x,y), 只要 $y\neq 0, G(x,y)$ 也是这样. 因此除了积分 $\int F(x,y)dt$ 所确定的变分问题外, 我们还可考虑 $\int\sqrt{F(x,y)}dt$ 所确定的这种问题. 现在要比较这两种问题的极值曲线.

预先必须把 "参变量表示的曲线" 及 "几何曲线" 作好区别. 空间 E 中用*参变量表示的曲线*简单地就是单实变数 $t\in I=[a,b]$ 的一个映射

$$\varphi: I\to E,$$

假定它属于 C^1 类; 还假定对于任何 $t \in I, \varphi'(t) \neq 0$, 使得点 $(\varphi(t), \varphi'(t))$ 正好在开集 U 内; 由假设, U 不包含满足 $y = 0$ 的任何点 (x, y). 在这样的用参变量表示的曲线上, 可作参变量代换

$$t = \lambda(u)$$

其中 λ 是从 $[a, b]$ 到 $[a, b]$ 上的 C^1 类严格增映射, 并且对于任何 u, 它有导出映射 $\lambda'(u) \neq 0$; 我们得到用参变量 u 表示的新曲线 $u \mapsto \varphi(\lambda(u))$. 按照定义, 一条几何曲线是和上面一样可用参变量代换互相推导的一类用参变量表示的曲线.

这样, 显然如果两条参变量表示的曲线在同一类中, 积分

$$\int_a^b \sqrt{F(\varphi(t), \varphi'(t))}dt$$

对于这两曲线有相同的值; 这与下式有关: 对于任何 $\xi > 0$,

$$\sqrt{F(x, \xi y)} = \xi\sqrt{F(x, y)}.$$

因此积分

$$\int_a^b \sqrt{F(\varphi(t), \varphi'(t))}dt$$

实际上与一条几何曲线有关. 极值曲线从而真是几何曲线: 曲线的参变量表示完全不重要. 当然, 对于 $\int_a^b F(\varphi(t), \varphi'(t))dt$ 却不是这样. 下列两命题完全阐明了这两问题之间的关系:

命题 2.5.1. $\int F dt$ 的任何极值曲线也是 $\int \sqrt{F} dt$ 的极值曲线.

事实上, 第一个问题的极值曲线是下列方程的解:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}. \tag{2.5.1}$$

而第二个问题的曲线是下列方程的解:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{1}{\sqrt{F}}\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{2.5.2}$$

但在 (2.5.1) 的极值曲线上, 我们知道 F 是常数; 因此这条极值曲线也满足 (2.5.2).

命题 2.5.2. $\int \sqrt{F} dt$ 的任何几何极值曲线有唯一一种参数表示法 (用 $t \in [a, b]$), 使得 $F(\varphi(t), \varphi'(t))$ 是常数. 这种参变量表示的曲线也是 $\int F dt$ 的极值曲线.

证. 从 $\int \sqrt{F} dt$ 的一条极值曲线

$$x = \psi(u)$$

出发. 求出 $u=\lambda(t)$, 使得

$$\sqrt{F(\psi(\lambda(t)),\psi'(\lambda(t)))}\cdot\lambda'(t)$$

与 t 无关; 而上式等于

$$\lambda'(t)\cdot\sqrt{F(\psi(u),\psi'(u))},\quad \text{其中 } u=\lambda(t).$$

函数 $\sqrt{F(\psi(u),\psi'(u))}$ 是取值 >0 的已知连续函数 $f(u)$; 我们要求

$$\frac{du}{dt}\cdot f(u)=c\quad (c \text{ 为常数})$$

由此得 $t=(1/c)\int f(u)du+k$, 其中 k 是常数. 确定 c 与 k, 使得对于 $u=a,t=a$; 对于 $u=b,t=b$. 于是 t 是 u 的已知函数, 有导数 >0; 反过来, u 是 t 的已知函数, 这就给出了所求的参变量代换. 用这一参变量 t, 曲线 $x=\varphi(t)=\psi(\lambda(t))$ 还是 (2.5.2) 的一个解, 但因 F 在这曲线上是常数, $x=\varphi(t)$ 也是 (2.5.1) 的一个解. 证完.

2.6. 流形的测地线情形

在第一章的 4.12 段中, 我们已经确定了 $\mathbb{R}^3$ 中一个曲面上曲线的长度元素. 更一般地, 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中 C^k 类的 p 维流形; 如果我们用 M 的局部参变量表示, 那么 M 中一点的坐标 $x_1,\cdots,x_n$ 是在开集 $U\subset\mathbb{R}^p$ 内变动的 p 个参变量 $u_1,\cdots,u_p$ 的 C^2 类函数, 而在 U 中每点, $\partial x_i/\partial u_j$ 的矩阵有 p 秩. 每当 $u_1,\cdots,u_p$ 是参变量 $t\in[a,b]$ 的 C^1 类函数, 而且导函数 $u_i'(t)$ 不同时是零时, 复合函数

$$x_i(u_1(t),\cdots,u_p(t))\quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

确定 $\mathbb{R}^n$ 中一条 C^1 类曲线, 它的长度元素是

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2+\cdots+\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2}dt.$$

如果我们用复合函数求导数定理计算 dx_i/dt, 就得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2&=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{dx_i}{\partial u_j}u_j'\right)^2,\quad \text{其中 } u_j'=\frac{du_j}{dt},\\&=F(u_1,\cdots,u_p,u_1',\cdots,u_p'),\end{aligned}$$

其中 F 是 $u_1',\cdots,u_p'$ 的非退化正的二次齐次形式, 系数是 $u_1,\cdots,u_p$ 的 C^{k-1} 类函数. 因此 M 上参变量表示的曲线的长度元素是

$$\sqrt{F(u_1,\cdots,u_p,u_1',\cdots,u_p')}dt,\tag{2.6.1}$$

其中 u_i 由确定曲线的 $u_i(t)$ 代替, u_i' 由这些函数的导数来代替.

作为定义, 流形 M 的测地线是

$$\int \sqrt{F(u_1, \cdots, u_p, u_1', \cdots, u_p')}dt$$

的极值曲线. 这是 "几何曲线", 因为当对 t 作参变量代换时, 给出曲线弧长的积分不改变.

我们可对测地线应用前面 2.5 段中的结果. 这就引导我们考虑积分

$$\int F(u_1, \cdots, u_p, u_1', \cdots, u_p')dt \tag{2.6.2}$$

的极值曲线; 这积分依赖于几何曲线上所选取的参变量. (2.6.2) 的极值曲线因而是带参变量 t 的测地线, 使得 $F(u_1, \cdots, u_p, u_1', \cdots, u_p')$ 在曲线上是常数: 换句话说, 参变量 t 必须与所考虑曲线的弧长成比例改变. 总之: (2.6.2) 的极值曲线是含与弧长成比例的参变量的测地线.

在求测地线时, 宁可求 (2.6.2) 的极值曲线较为有利: 这样计算避免了根式, 并且可能相差一个常数因子外, 同时提供了长度.

现阐明 (2.6.2) 的欧拉方程. 为此, 应用向量记号. u 是 C^1 类映射 $I \to \mathbb{R}^p, u'$ 是 u 的导出映射. 我们把 $F(u_1, \cdots, u_p, u_1', \cdots, u_p')$ 写作 $F(u, u')$. 必须写出

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = \frac{\partial F}{\partial u}, \qquad \text{也就是}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \cdot \partial u'} \cdot u' + \frac{\partial^2 F}{\partial u' \cdot \partial u'} \cdot u'' = \frac{\partial F}{\partial u}, \tag{2.6.3}$$

其中 u' 及 u'' 是未知映射 u 对 t 的一阶及二阶导出映射. 上列方程的两边在 $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R})$ 中取值; $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R})$ 是空间 $E = \mathbb{R}^p$ 的对偶空间, 而映射 $u(t)$ 在后一空间中取值. 必须注意 $\partial^2 F/(\partial u \cdot \partial u')$ 在双线性映射 $E \times E \to \mathbb{R}$ 空间中取值, 并且记号 $\partial^2 F/(\partial u \cdot \partial u') \cdot u'$ 有点不清楚, 因为把一线性映射 $E \to \mathbb{R}$ 与一向量 u' 及一双线性映射 $E \times E \to \mathbb{R}$ 相联系, 有两种方式. 为了解释清楚, 在这里必须记得 $\partial^2 F/(\partial u \cdot \partial u') \cdot u'$ 表示映射 $\partial F/\partial u'$ 的导出映射 $\partial/\partial u$ 在向量 u' 上的值 [不要与映射 $\partial F/\partial u$ 的导出映射 $\partial/\partial u'$ 在向量 u' 上的值相混淆].

还要注意, 由于 F 对 u' 是二次齐次的, $\partial F/\partial u'$ 对 u' 是一次齐次的, 并且它的导出映射 $(\partial/\partial u)(\partial F/\partial u')$ 也是这样; 又 $\partial^2 F/(\partial u' \cdot \partial u')$ 对 u' 是零次齐次的, 即与 u' 无关; 至于 $\partial F/\partial u$, 它对 u' 是二次齐次的. 最后, 参变量表示的测地线有微分方程

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u' \cdot \partial u'}(u) \cdot u'' = G(u, u') \tag{2.6.4}$$

其中 G 在 $\mathscr{L}(E; \mathbb{R})$ 中取值, 对 u' 是二次齐次的, 对 u 属于 C^{k-1} 类.

既然 F 对 u' 是非退化二次式, 映射

$$\xi \mapsto \frac{\partial^2 F}{\partial u' \cdot \partial u'}(u) \cdot \xi$$

对于每个 u, 是从 E 到它的对偶 $\mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ 上的同构; 设 $\sigma(u):\mathscr{L}(E;\mathbb{R})\to E$ 是逆同构, 它对 u 属于 C^k 类, 把 $\sigma(u)$ 作用到 (2.6.4) 的两边, 就得到与 (2.6.4) 等价的一个方程

$$u''=\sigma(u)\cdot G(u,u') \tag{2.6.5}$$

上式右边 $H(u,u')$ 对 u' 是二次齐次的, 对 u 属于 C^{k-1} 类, 在 E 中取值. 这是用参变量表示并与弧长成比例的测地线的微分方程.

现在对方程 (2.6.5) 应用二阶微分方程存在与唯一性的局部定理. 但首先验证: 如果 $u(t)$ 是一个解, 那么无论常数 c 是什么, $u(ct)$ 也是一个解: 既然参变量 t 限于与测地线的弧长成比例, 事先就可知这一点; 在 (2.6.5) 上验证它要借助于方程右边是 u' 的二次齐次映射 $H(u,u')$ 这一事实. 这样, 如果已给初始值 $u(0)$ 及初始导出映射值 $u'(0)$, 那么存在着一个并且只有一条测地线 $u(t)$ (在区间 $-\varepsilon\leqslant t\leqslant+\varepsilon$ 中) 对应于这些初始值. 如果我们用常数 >0 乘 $u'(0)$, 不能改变几何曲线. 因此存在着一条、并且只有一条几何测地线通过给定的一点、还在这点与一个给定的直线相切.

另一方面, 要把上编《微分学》第二章的定理 3.8.1 应用到方程 (2.6.5); 这定理对任何 C^1 类二阶微分方程适用. 因此为了应用这定理, 假定二次形式 $F(u,u')$ 是 u 的 C^2 类映射, 于是参变量表示的测地线是下列方程的解:

$$u''=H(u,u'),$$

其中 $H(u,u')$ 对 u 属于 C^1 类. 现应用上编《微分学》第二章的定理 3.8.1, 把那里的 x 换成 u, x' 换成 u'. 相应于已给初始值的解是

$$u(t)=a\quad(\text{常量}).$$

这样, 上述定理 3.8.1 后的注释使我们得到下列结论:

如果已给与 a 充分接近的两点 b 及 $c\in\mathbb{R}^p$, 那么存在着一个并且只有一个接近 0 的初速 $u'(0)$, 使得对于 $|t|\leqslant 1$ 有测地线 $u(t)$, 它满足 $u(0)=b$ 及 $u(1)=c$. 简单地说. 存在着一条、并且只有一条测地线通过与 a 充分接近的两点 b 及 c.

2.7. 流形上曲线的极值问题

为了简化, 假定 $E=\mathbb{R}^n$, 并且设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中 C^p (p 充分大) 类的流形 (参看第二章, 4.7 段). 给定了 S, 以后只考虑这样的 C^1 类曲线

$$\varphi: I\to\mathbb{R}^n$$

对于 $t\in I=[a,b]$, 我们有 $\varphi(t)\in S$ 的. 这样的曲线叫做 "在 S 上". 它们在所有 C^1 类曲线构成的巴拿赫空间 V 中, 形成一个子集 V_S (参看 1.1 段); 对 V_S, 我们赋予 V 的拓扑的诱导拓扑, 可是 V_S 不是一个子向量空间.

如同从开始以来一样, 在开集 $U \subset \mathbb{R} \times E \times E$ 中给出一个 C^k 类数值函数 F, 并且把对任何 $t \in I$, 满足 $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in U$ 的 φ 所形成 V 中开集记作 Ω. 于是 $V_S \bigcap \Omega$ 是拓扑空间 V_S 中一个开集.

极小问题. 设 $\Omega_S(\alpha, \beta)$ 是满足 $\varphi \in V_S \bigcap \Omega, \varphi(a) = \alpha$ 及 $\varphi(b) = \beta$ 的 φ 所组成的集; 这是一个拓扑空间, 设它不是空集 [这就导致点 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 及 $\beta \in \mathbb{R}^n$ 属于 S 的同一连通分支]. 设 $\varphi_0 \in \Omega_S(\alpha, \beta)$. 要问对于 $\varphi \in \Omega_S(\alpha, \beta), \varphi_0$ 是否给出

$$f(\varphi) = \int_a^b F(t, \varphi(t), \varphi'(t))dt \tag{2.7.1}$$

的一个相对极小? 换句话说, 是否对于与 φ_0 充分接近的 [对于 $\Omega_S(\alpha, \beta)$ 的拓扑] 所有 $\varphi \in \Omega_S(\alpha, \beta)$,

$$f(\varphi) \geqslant f(\varphi_0)?$$

我们要证明下列定理:

定理 2.7.1. 要使得当 φ 在 $\Omega_S(\alpha, \beta)$ 中变动时, φ_0 给出 (2.7.1) 的一个相对极小, 必须对于属于 C^1 类并且具有性质 $P(S)$ 的所有 $u : I \to \mathbb{R}^n$, 我们有

$$f'(\varphi_0) \cdot u = 0, \tag{2.7.2}$$

这里 $P(S)$ 是: *我们有* $u(a) = 0, u(b) = 0$, *并且对于任何* $t \in I$, *向量* $u(t) \in \mathbb{R}^n$ *在点* $\varphi_0(t)$ *与流形* S *相切* [关于向量与流形相切的定义, 见第一章命题 4.7.2. 设 $x \in S$; 如果一个向量属于切向量空间 $T_x(S)$, 就说这向量在点 x 与 S 相切].

注释. 在 1.4 段中, 求得的必要条件是: 对于在 $t = a$ 及 $t = b$ 是零的任何 C^1 类映射 $u : I \to \mathbb{R}^n, f'(\varphi_0) \cdot u = 0$. 在这里, 在定理 2.7.1 中, 只考虑映射 u 的更小的集; 因此加上 φ_0 的条件 (2.7.2) 比在 1.4 段中找到的条件弱一些. 这是有利的, 因为如果我们想一想例如曲线弧长的极小问题, 2.1 段中的条件实际要求这曲线是一直线段; 然而在这里要曲线在已给流形 S 上, 而且联结 S 上两点的直线段也在 S 上的机会极少.

在证明定理 2.7.1 前, 我们记得有

$$f'(\varphi_0) \cdot u = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi_0(t), \varphi_0'(t)) \cdot u(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi_0(t), \varphi_0'(t)) \cdot u'(t)\right] dt \tag{2.7.3}$$

(参看关系式 (1.2.3)).

定理 2.7.1 的证明. 设当

$$t \in I, \text{ 并且 } |\lambda| \leqslant \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ 小})$$

时, 两个实变量 t 及 λ 的已给 C^1 类映射 $\psi(t, \lambda)$ 在 S 中取值. 这映射确定含一个参变量 λ 的曲线族 $\varphi_\lambda : I \to S$, 即

$$\varphi_\lambda(t) = \psi(t, \lambda).$$

假定 $\psi(t,0)$ 恰好是定理 2.7.1 叙述中的映射 $\varphi_0(t)$, 并且对于任何 λ, $\varphi_\lambda(a)=a$, $\varphi_\lambda(b)=b$; 那么对于充分小的 $|\lambda|$, 我们有 $\varphi_\lambda\in\Omega_S(\alpha,\beta)$. 还假定 ψ 及 $\partial\psi/\partial t$ 有对 λ 的偏导出映射:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(t,\lambda)\quad 及\quad \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,\lambda),$$

并且它们是 (t,λ) 的连续映射. 那么

$$f(\varphi_\lambda)=\int_a^b F\left(t,\psi(t,\lambda),\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,\lambda)\right)dt$$

是变量 λ 的可微函数, 并且 $\int$ 号下微分法引理告诉我们: 上式右边关于 λ 的导数对于 $\lambda=0$ 等于

$$\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial x}(t,\varphi_0(t),\varphi_0'(t))\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(t,0)+\frac{\partial F}{\partial y}(t,\varphi_0(t),\varphi_0'(t))\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,0)\right]dt. \tag{2.7.4}$$

如果 φ_0 给出 $f(\varphi)$ 的相对极小, 那么 $f(\varphi_\lambda)$ 关于 λ 的导数对于 $\lambda=0$ 必然是零; 因此表示式 (2.7.4) 必然是零. 这样, 如果证明了下列引理, 定理 2.7.1 显然得证.

引理 2.7.2. 如果 $u:I\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 类映射, 并且满足条件 $P(S)$, 那么如同上面一样, 存在着一个在 S 中取值的映射 $\psi(t,\lambda)$, 使得

$$\psi(t,0)=\varphi_0(t),\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}(t,0)=u(t),\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,0)=u'(t). \tag{2.7.5}$$

[直观地说, 这表示可把曲线 φ 纳入一个 S 上的曲线族 φ_λ 中, 使得对每个值 $t\in I$, 当 λ 从 0 出发变动时, $\psi(t,\lambda)$ 的"无穷小位移"等于与 S 在点 $\varphi_0(t)$ 相切的向量 $u(t)$.]

对于这引理的证明, 我们只作简单的提示, 而不详细进行. 假定流形 S 属于 C^3 类, 从而这流形的 ds^2 是局部表示 S 的参变量的 C^2 类映射. 于是 S 的测地线的微分方程属于 C^1 类, 因而可对它应用存在性及对初始条件的依赖性的一般定理. 对于每点 $x\in S$ 以及每个切向量 $y\in T_x(S)$, 连带着有测地线

$$\lambda\mapsto g(x,y,\lambda),$$

其中参变量取得与测地线的弧长成比例, 并且 $g(x,y,0)=x,(\partial g/\partial\lambda)(x,y,0)=y$; 如果 $\|\lambda y\|$ 充分小, $g(x,y,\lambda)$ 是确定的. 这样确定的 $g(x,y,\lambda)$ 属于 C^1 类. 在 $g(x,y,\lambda)$ 中把 x 换成 $\varphi_0(t)$, 并把 y 换成 $u(t)$; $g(\varphi_0(t),u(t),\lambda)$ 就是满足引理中条件 (2.7.5) 的映射 $\psi(t,u)$.

定义. 满足定理 2.7.1 中必要条件的曲线 $\varphi_0:I\to S$ 叫做 $\int_a^b F(t,\varphi(t),\varphi'(t))dt$ 在 S 上的极值曲线.

现在再写出 φ 来代替 φ_0, 我们看到: 曲线 $\varphi: I \to S$ 是极值曲线, 必须而且只须对于满足条件 $P(S)$ 的任何 C^1 类映射 $u: I \to \mathbb{R}^n$, 我们有

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \cdot u(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \cdot u'(t)\right] dt = 0. \tag{2.7.6}$$

2.8. 上列情形的变换

我们要像在 1.5 段中那样进行. 但在这里为了简化, 我们承认当 φ 是极值曲线时, t 的映射

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t))$$

有导出映射. 如同在 1.5 段中一样, 令

$$A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t)), \quad B(t) = \frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)),$$

由于 $u(a) = 0, u(b) = 0$, 用分部积分法得

$$\int_a^b (A(t) \cdot u(t) + B(t) \cdot u'(t))dt = \int_a^b (A(t) - B'(t)) \cdot u(t)dt.$$

因此 φ 是极值曲线的条件是: 对于满足条件 $P(S)$ 的任何 C^1 类映射 $u: I \to \mathbb{R}^n$,

$$\int_a^b (A(t) - B'(t)) \cdot u(t)dt = 0.$$

像在引理 1.5.3 的证明中那样论证, 可以证明: 对于任何 $t \in I$, 于 S 在点 $\varphi(t)$ 处的任何切向量上, 线性形式 $A(t) - B'(t) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ 必须是零, 作为习题, 这留给读者证明. 当然, 这个必要条件也是充分的. 结论是:

定理 2.8.1. 要使得 $\varphi: I \to S$ 是极值曲线, 在

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t))$$

是 t 的可导映射条件下, 必须而且只须, 对于任何 $t \in I$, 在点 $x = \varphi(t)$ 处的切空间 $T_x(S)$ 中所有向量上, 元素

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$$

是零.

因此在这种情形, 这就是代替定理 1.5.2 中欧拉方程的结果.

例. 取 $n = 3$, 并且设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 是 3 维欧几里得空间中一个曲面. 取

$$F(t, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2}$$

因此积分 $\int F(t,\varphi(t),\varphi'(t))dt$ 是给出曲线弧长的积分, 并且极值曲线是曲面 S 的测地线; 把它们看作周围 $\mathbb{R}^3$ 空间中的曲线, 现表述定理 2.8.1 中的条件: 线性形式 $\partial F/\partial y$ 的系数是 $\partial F/\partial y_1, \partial F/\partial y_2, \partial F/\partial y_3$, 即

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}},$$

也就是曲线 φ 的切线的方向余弦. 因此 $(d/dt)(\partial F/\partial y_i)$ 是曲线 φ 的单位切向量 (对 t) 之导出映射的分量; 它们与曲线 φ 的主法线上单位向量的分量成比例. 因此定理 2.8.1 表明: 曲线在点 $\varphi(t)$ 的主法线与 S 在点 $\varphi(t)$ 的所有切向量正交. 换句话说, S 的测地线是这样的曲线: 在曲线上每一点, 曲线的主法线就是曲面 S 的法线.

3. 二 维 问 题

到现在为止, 我们研究了与曲线 $\varphi: I \to E$ 相联系的单积分 $\int_a^b F(t,\varphi(t),\varphi'(t))dt$ 的 "变分". 对于研究重积分的变分, 现在只作一些简短的提示.

3.1. 问题的地位

代替线段 $I \subset \mathbb{R}$, 我们要考虑带边界的紧集 $K \subset \mathbb{R}^2$ (在平面 $\mathbb{R}^2$ 中, 取坐标 t_1, t_2). 关于带 C^1 类边界的紧集概念, 请再参看第一章的 4.2 段. 如果一个映射

$$\varphi: K \to E \qquad (\text{其中 } E \text{ 是一个巴拿赫空间})$$

在 K 上连续, 在 K 的内部属于 C^1 类, 并且如果 φ 的一阶偏导出映射可连续开拓到 ∂K, 那么就说 φ 属于 C^1 类. C^1 类的映射 $\varphi: K \to E$ 组成一向量空间 V. 在 V 上, 取下列范数:

$$\|\varphi\| = \sup_K \|\varphi(t_1,t_2)\| + \sup_K \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t_1,t_2)\right\| + \sup_K \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t_1,t_2)\right\|.$$

可以证明: 对于这一范数, V 是完备的 (证明在细节中略有困难, 现不详细讨论); 因此 V 是一个巴拿赫空间.

另一方面, 在开集 $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times E\times E\times E$ 中给出一个 $C^k (k \geqslant 1)$ 类的数值映射 $F(t_1,t_2,x,y_1,y_2)$.

设 $\varphi \in V$, 并且使得对于任何点 $(t_1,t_2) \in K$, 我们有

$$\left[t_1,t_2,\varphi(t_1,t_2),\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t_1,t_2),\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t_1,t_2)\right] \in U;$$

所有这样的 φ 组成巴拿赫空间 V 中一个开集 Ω (证明与命题 1.2.1 的证明类似; 证明中要用到 K 的紧性). 对于 $\varphi \in \Omega$, 我们确定 "泛函"

$$f(\varphi) = \iint_K F\left[t_1,t_2,\varphi(t_1,t_2),\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t_1,t_2),\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t_1,t_2)\right] dt_1 \wedge dt_2.$$

我们要证明 $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 属于 C^k 类 (如同 F 一样), 还要证明对于任何 $u\in V$, 我们有

$$f'(\varphi)\cdot u=\iint_K\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\cdot u(t_1,t_2)+\frac{\partial F}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial t_1}(t_1,t_2)+\frac{\partial F}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t_2}(t_1,t_2)\right\}dt_1\wedge dt_2,\tag{3.1.1}$$

这里在

$$\frac{\partial F}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y_1}\quad 及\ \frac{\partial F}{\partial y_2}$$

中, 必须把 x 换成 $\varphi(t_1,t_2), y_1$ 换成 $\partial u/\partial t_1$, 并且 y_2 换成 $\partial u/\partial t_2$.

在 1.4 段中, 已经提出了关于 $\varphi(t)$ 的极小问题, 其中 $\varphi(a)$ 及 $\varphi(b)$ 有给定的值. 在这里, 线段 I 的端点 a 及 b 的地位, 要由带边界的紧集 K 的边界 ∂K 来取代. 因此我们只考虑这样的 $\varphi:K\to E$, 它们在 ∂K 的限制是一个给定的属于 C^1 类的 $\psi:\partial K\to E$. 这些 φ 组成巴拿赫空间 V 的一个仿射子空间 $W(\psi)$; 给定一个 $\varphi_0\in W(\psi)$ 就确定了从 $W(\psi)$ 到 $W(0)$ 上的一个双射, 即

$$\varphi\to\varphi-\varphi_0$$

(映射 $\varphi-\varphi_0$ 在边界 ∂K 上是零).

已给 $\varphi_0\in\Omega$, 在所有与 φ_0 充分接近、并且在 ∂K 与 φ_0 有相同限制的 φ 中, 我们可以问: φ_0 是否可使 $f(\varphi)$ 达到极小. 关于极小的一个必要条件是: 在向量子空间 $W(0)$ 中所有向量 u 上, 导出映射 $f'(\varphi_0)$ 取值 0. 作为定义, 一个这样的函数 φ_0 叫做关于积分

$$\iint_K F\left(t_1,t_2,\varphi(t_1,t_2),\frac{\partial\varphi}{\partial t_1},\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right)dt_1\wedge dt_2$$

的极值曲面.

于是再把 φ_0 写作 φ , 并且考虑到关系式 (3.1.1), 我们可陈述:

定理 3.1.1. 要使得属于 Ω 的 $\varphi:K\to E$ 是一极值曲面, 必须而且只须对于任何 C^1 类映射 $u:K\to E$, 只要它在边界 ∂K 上任何点是零, 就有

$$\iint_K\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\cdot u(t_1,t_2)+\frac{\partial F}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial t_1}(t_1,t_2)+\frac{\partial F}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t_2}(t_1,t_2)\right\}dt_1\wedge dt_2=0\tag{3.1.2}$$

[在 (3.1.2) 的左边, $\partial F/\partial x$ 表示

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(t_1,t_2,\varphi(t_1,t_2),\frac{\partial\varphi}{\partial t_1},\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right),\ 并且对\ \frac{\partial F}{\partial y_1}\ 及对\ \frac{\partial F}{\partial y_2}\ 也类似].$$

这定理与定理 1.4.1 类似.

3.2. 极值条件的变换

令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\left(t_1, t_2, \varphi(t_1, t_2), \dfrac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial t_2}\right) = A(t_1, t_2), \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_1}\left(t_1, t_2, \varphi(t_1, t_2), \dfrac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial t_2}\right) = B_1(t_1, t_2), \\ \dfrac{\partial F}{\partial y_2}\left(t_1, t_2, \varphi(t_1, t_2), \dfrac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial t_2}\right) = B_2(t_1, t_2). \end{cases} \tag{3.2.1}$$

这些是在 K 上连续, 在 $\mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ 中取值的映射.

我们还要假定 B_1 及 B_2 属于 C^1 类, 并且在这较强的假设下, 要证明下列引理:

引理 3.2.1. 要使得对于在 ∂K 上是零的任何 C^1 类的 $u: K \to E$, 积分

$$\iint_K \left(A(t_1, t_2) \cdot u(t_1, t_2) + B_1(t_1, t_2) \cdot \frac{\partial u}{\partial t_1} + B_2(t_1, t_2) \frac{\partial u}{\partial t_2}\right) dt_1 \wedge dt_2 \tag{3.2.2}$$

是零, 必须而且只须

$$A = \frac{\partial B_1}{\partial t_1} + \frac{\partial B_2}{\partial t_2} \tag{3.2.3}$$

证明概要. 已给映射 $u: K \to E$, 考虑含两个变量 t_1 及 t_2 的一次微分形式:

$$\omega = [B_1(t_1, t_2) \cdot u(t_1, t_2)]dt_2 - [B_2(t_1, t_2) \cdot u(t_1, t_2)]dt_1$$

我们有

$$\begin{aligned} &\left(B_1(t_1, t_2) \cdot \frac{\partial u}{dt_1} + B_2(t_1, t_2) \cdot \frac{\partial u}{\partial t_2}\right) dt_1 \wedge dt_2 \\ &= d\omega - \left[\left(\frac{\partial B_1}{\partial t_1} + \frac{\partial B_2}{\partial t_2}\right) \cdot u(t_1, t_2)\right] dt_1 \wedge dt_2; \end{aligned}$$

因此积分 (3.2.2) 等于

$$\iint_K \left(A - \frac{\partial B_1}{\partial t_1} - \frac{\partial B_2}{\partial t_2}\right) \cdot u(t_1, t_2) dt_1 \wedge dt_2 + \iint_K d\omega.$$

然而由斯托克斯定理,

$$\iint_K d\omega = \int_{\partial K} \omega;$$

上式是零, 因为既然在任何点 $(t_1, t_2) \in \partial K, u(t_1, t_2) = 0$, 形式 ω 在 ∂K 上引出零.

因此对于在 ∂K 上是零的任何 C^1 类 u, 积分 (3.2.2) 等于

$$\iint_K \left(A - \frac{\partial B_1}{\partial t_1} - \frac{\partial B_2}{\partial t_2}\right) \cdot u(t_1, t_2) dt_1 \wedge dt_2.$$

要使得对于 (在 ∂K 上是零) 的任何 u, 上列积分等于零, 必须 (显然也是只须) 映射 $A - \partial B_1/\partial t_1 - \partial B_2/\partial t_2$ 恒等于零: 论证与证明引理 1.5.3 相似, 请读者作出. 于是条件 (3.2.3) 是必要及充分的.

考虑到 (3.2.1) 中所给出 A, B_1 及 B_2 的值, 我们已经证明:

定理 3.2.2. 要使属于 Ω 的 $\varphi: K \to E$ 是极值曲面, 必须而且只须我们有

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_2}\right)}, \tag{3.2.4}$$

这里约定在 $\partial F/\partial x$, 以及在 $\partial F/\partial y_1$ 及 $\partial F/\partial y_2$ 中, 把 x 换成 $\varphi(t_1, t_2), y_1$ 换成 $\partial\varphi/\partial t_1$, 并且 y_2 换成 $\partial\varphi/\partial t_2$. 这就是代替欧拉方程的方程.

注释. 上列方程只是假定 $\partial F/\partial y_1$ 及 $\partial F/\partial y_2$ 对 t_1 及 t_2. 属于 C^1 类时证明的.

关系式 (3.2.4) 表明

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} dt_1 \wedge dt_2 = d\left(\frac{\partial F}{\partial y_1} dt_2 - \frac{\partial F}{\partial y_2} dt_1\right)}, \tag{3.2.5}$$

这是极值曲面方程的另一写法.

当函数 $F(t_1, t_2, x, y_1, y_2)$ 与 x 无关时, 条件 (3.2.5) 简单地表明: 微分形式

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\left(t_1, t_2, \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right) dt_2 - \frac{\partial F}{\partial y_2}\left(t_1, t_2, \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right) dt_1$$

是闭的 (它的外微分是零).

例. 在空间 $\mathbb{R}^3$ 中, 把 x, y, z 叫做坐标, 并且考虑由 $z = \varphi(x, y)$ 所确定的曲面. 在上面的理论中, 取 $E = \mathbb{R}$, 并且把 t_1 换成 x, t_2 换成 y, x 换成 $z, \partial\varphi/\partial t_1$ 换成 $\partial z/\partial x$, 并且 $\partial\varphi/\partial t_2$ 换成 $\partial z/\partial y$; 我们要采用经典的记号: 用 p 代替 $\partial z/\partial x, q$ 代替 $\partial z/\partial y$.

设已给函数 $F(p, q)$ 与 x, y, z 无关; 考虑泛函

$$\iint_K F(p, q) dx \wedge dy,$$

其中积分取在曲面 $z = \varphi(x, y)$ 上满足 $(x, y) \in K$ 的一部分. 极值曲面是使微分形式

$$\frac{\partial F}{\partial p} dy - \frac{\partial F}{\partial q} dx$$

(其中 p 及 q 代替了 $\partial\varphi/\partial x$ 及 $\partial\varphi/\partial y$) 是闭形式的曲面.

更特殊地, 取

$$F(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}; \text{ 那么 } \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx \wedge dy$$

是曲面 $z = \varphi(x, y)$ 的面积元素. 积分

$$\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx \wedge dy$$

的极值曲面叫做极小曲面 [因为, 事实上, 一片充分小的这种曲面, 对于有相同边界的 "邻近" 曲面, 实现了极小的面积]. 由 (3.2.4), 极小曲面是下列方程的解:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0. \tag{3.2.6}$$

这是一个二阶偏微分方程, 其中未知函数 z 有两个变量 x 及 y. 展开上列方程, 即得

$$\left(1+q^2\right)r-2pqs+\left(1+p^2\right)t=0, \tag{3.2.7}$$

其中 r,s,t 分别表示 $\partial^2 z/\partial x^2, \partial^2 z/\partial x\partial y, \partial^2 z/\partial y^2$.

习题

习题 1. 在 $[a,b]$ 上 C^2 类曲线 (在巴拿赫空间 E 中取值) 的空间中, 取范数

$$\|x\|=\sup_{t\in[a,b]}\left(\|x(t)\|+\|x'(t)\|+\|x''(t)\|\right).$$

如果 $F(t,x,y,z)$ 是 C^1 类的映射, 令

$$f(x)=\int_a^b F(t,x(t),x'(t),x''(t))dt.$$

证明 f 是 x 的可微映射, 并且导出映射由下式给出:

$$f'(x)\cdot u=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot u+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot u'+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot u''\right)dt$$

(为了书写简化, 已令

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x(t),x'(t),x''(t))\cdot u(t)=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot u,\ 等等).$$

用分部积分变换这一导出映射.

习题 2. 确定下列积分的极值曲线:

$$\int_a^b tx'y'dt,\quad \int_a^b (x'+y)(x+y')dt,\quad \int_a^b x(x'+y'+t)dt.$$

如果下列积分中的 F 关于第三个变量是线性的或仿射的, 那么下列积分的极值曲线一般情况如何:

$$I(f)=\int F(t,f,f')dt?$$

习题 3. 设有下列形状的积分:

$$I(x)=\int_a^b F(t,x')dt,$$

其中 F 是在整个平面上的 C^1 类数值函数. 如果极值曲线存在, 设 $x_0(t)$ 是这条极值曲线, 并且 $x_0(a)=\alpha, x_0(b)=\beta$; 又设 $x(t)$ 是另一 C^1 类函数, 并且 $x(a)=\alpha, x(b)=\beta$.

证明

$$I(x)-I(x_0)=\int_a^b\left[F(t,x')-F(t,x_0')-(x'-x_0')\frac{\partial F}{\partial x'}(t,x_0'(t))\right]dt.$$

由此导出: 如果 F 是第二个变数的凸函数, 那么 x_0 实现一个绝对极小(应用上编《微分学》, 第一章, 习题 8).

习题 4. 对于下列积分

$$\int_a^b(x^2-x'^2)dt$$

满足条件 $x(a)=\alpha, x(b)=\beta$ 的极值曲线, 研究它的存在及唯一性.

习题 5. 设 λ 是已给常数, 求下列积分的极值曲线:

$$I_\lambda(x)=\int_{-1}^{+1}\left(t^2+\lambda^2\right)x'^2dt$$

(a) 证明: 如果 $\lambda\neq 0$, 那么对于 $a\neq b$, 存在着一条并且只有一条极值曲线通过点 $(-1,a)$ 及 $(1,b)$, 而且它实现积分 $I_\lambda(x)$ 的一个绝对极小.

(b) 如果 $\lambda=0$, 证明 C^1 类极值曲线不存在. 证明 $I_0(x_0)$ 不可能是零, 但适当选取函数 $x(t)$, 可使这积分任意小.

习题 6. (a) *初步问题*. 设 Ω 是巴拿赫空间 E 中开集, f 及 g 是在 Ω 中取实值的两个 C^1 类映射.

C 是已给常数, 考虑满足 $g(x)=C$ 的点 x 所组成的集 $V\subset\Omega$. 设 a 是 V 中一点; 假定 $g'(a)\neq 0$. 证明 $g'(a)$ 的核 N 有余维数 1.

设 $u\in N, u\neq 0$; 证明包含在 V 内、通过 a、并且在 a 与向量 u 相切的 C^1 类 1 维流形中, 存在着一个元素. (可求 V 与方程 $x=a+\lambda u+\mu v$ 所表示 2 维平面的交集, 这里 v 是固定的, 并且 $v\notin N$; 应用隐映射定理, 证明这交集在 a 的一个邻域中的限制是所求流形的元素).

由此导出: 如果 f 在 V 的限制在 a 有极值, 那么对于任何 $u\in N, f'(a)\cdot u=0$; 然后证明 $f'(a)$ 与 $g'(a)$ 成比例. (证明如果 $v\notin N$,

$$f'(a)-\frac{f'(a)\cdot v}{g'(a)\cdot v}g'(a)=0.)$$

(b) *应用*. 设 I 是区间 $[a,b]$; $F(t,x,y), G(t,x,y)$ 是 $I\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 中的两个 C^1 类函数; α,β,C 是三个已给数.

令

$$f(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))dt,$$
$$g(x) = \int_a^b G(t, x(t), x'(t))dt.$$

在 $[a,b]$ 上的 C^1 类映射 $x(t)$ 中, 找出满足

$$\begin{cases} x(a) = \alpha, \\ x(b) = \beta, \\ y(x) = C \end{cases}$$

并且使得 $f(x)$ 取极值的映射.

证明: 如果这样的函数 $x_0(t)$ 存在, 并且如果 $g'(x_0) \neq 0$, 那么可找到一数 λ, 使得 $x_0(t)$ 是积分 $f(x) - \lambda g(x)$ 的一条极值曲线 $y_0(t,\lambda)$. 数 λ 是由下列条件逆推确定的:

$$g(y_0(\lambda)) = C.$$

例. 求在 $\mathbb{R}^2$ 中联结原点及点 (1,0), 并且满足 $\int_\Gamma Pdx + Qdy = C$ 的最短曲线 Γ, 这里 (P,Q) 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 C^1 类向量场, (可把 Γ 用它的弧 s 作为参变量来表示, 并且写出 $x(s), y(s)$ 所满足的二阶常微分方程组.)

证明如果 $P'y - Q'x$ 是一常数, 那么 Γ 是一圆弧; 指出怎样确定 λ .

习题 7. 应用上题第一部分, 在满足 $\int_0^{2\pi} r^2du = C$, 以及 $r(0) = r(2\pi) = 0$ (C 是已给常数) 的 C^1 类函数 $r(u)$ 中, 找出使下列积分达到极小值的:

$$\int_0^{2\pi} \left(r^2 + r'^2\right)^{\frac{1}{2}} du.$$

[这就是用极坐标来求: 能围出已给面积的最短封闭曲线.]

习题 8. 采用半极坐标 (r,θ,z), 把由 $r = f(z), a \leqslant z \leqslant b$ (f 是正函数, 属于 C^1 类) 所确定的旋转曲面记作 $\sum(f)$.

(a) 把这曲面的面积 $A(f)$ 用 $[a,b]$ 上简单积分的形式表示出来, 并且求出使这积分的极值函数 f [可先求 f 的反函数].

(b) 对于 $a \leqslant z_1 \leqslant z_2 \leqslant b$, 用 $V(z_1,z_2,f)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 中由不等式 $0 \leqslant r \leqslant f(z), z_1 \leqslant z \leqslant z_2$ 以及曲面 $A(z_1,z_2,f)$ 所确定区域的体积, 这里 $A(z_1,z_2,f)$ 表示 $\sum(f)$ 上包含在平面 $z = z_1$ 及 $z = z_2$ 之间的部分及其面积.

证明问题 (a) 中所确定的极值曲面, 以及旋转柱体使比值

$$\frac{V(z_1,z_2,f)}{A(z_1,z_2,f)}$$

与 z_1 及 z_2 无关, 并且在围绕 Oz 的旋转曲面中, 只有它们具有这一性质.

习题 9. 设 $f(t,x,y)$ 是在 $\Omega\times\mathbb{R}$ 内确定的一个 C^2 类数值函数, Ω 是平面上的一个凸开集. 我们要研究满足下列条件的函数 f:

$$\text{(D)}\qquad \frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial y}-y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0.$$

A 及 B 表示 Ω 中横坐标是 a 及 b 的两点, $a\neq b$, 考虑

$$\int_a^b f(t,x,x')dt.$$

(a) 证明只要 Ω 中所有直线段是极值线, 条件 (D) 成立.

(b) 用 $X(t)$ 表示其图形是联结 A 及 B 的线性函数. 当 f 与 y 线性相关时, 解释条件 (D); 然后对于其图形在 Ω 内并联结 A 及 B 的任何 C^2 类函数 $x(t)$, 证明

$$\int_a^b f(t,x,x')dt=\int_a^b f(t,X,X')dt.$$

(c) 证明: 如果 f 是 y 的凸函数, 那么采用上一问题中的记号, 我们有

$$\int_a^b f(t,x,x')dt\geqslant\int_a^b f(t,X,X')dt.$$

习题 10. 应用施瓦兹不等式, 证明下列两命题 (分别与命题 2.5.1 及 2.5.2 类似):

(a) 如果用参变量表示的曲线 $x=\varphi(t)$ 使

$$\int_a^b F(\varphi(t),\varphi'(t))dt$$

达到相对极大 (对于在空间 V 的拓扑意义下充分邻近、并且用参变量 $t\in[a,b]$ 表示的 C^1 类曲线) 那么它也使

$$\int_a^b \sqrt{F(\varphi(t),\varphi'(t))}dt$$

达到相对极小.

(b) 如果一条几何曲线使

$$\int_a^b \sqrt{F(\varphi(t),\varphi'(t))}dt$$

达到相对极小, 并且如果用参变量表示, 使得 $F(\varphi(t),\varphi'(t))$ 是常数 (参看命题 2.5.2), 那么这曲线也使

$$\int_a^b F(\varphi(t),\varphi'(t))dt$$

达到相对极小.

习题 11.　不像在 2.5 段中那样, 假定 $F(x,y)$ 是 y 的二次齐次式, 而是更一般地, 假定我们有

$$F = F_2 + F_0,$$

其中 $F_2(x,y)$ 是非退化的 y 的二次齐次式, 并且 F_0 与 y 无关. 由定理 2.4.1, 在 $\int Fdt$ 的每条极值曲线上, $F_2 - F_0$ 是常量. 考虑一条极值曲线, 在它上面

$$F_2 - F_0 = h,$$

h 是已给常量, 并且假定对于任何 $t, \varphi'(t) \neq 0$. 既然对于 $y \neq 0, F_2(x,y) \neq 0$, 因此在这条极值曲线上任何点, 我们有 $(F_0 + h)F_2 > 0$. 从而对于充分邻近 (在 V 中拓扑的意义下) 的曲线, $(F_0 + h)F_2 > 0$. 在满足

$$(F_0(x) + h)F_2(x,y) > 0$$

的 (x,y) 所组成的开集 U_h 中, 考虑关于积分

$$\int_a^b \sqrt{(F_0 + h)F_2}dt$$

的变分问题. 要证明与命题 2.5.1 及 2.5.2 类似的两个命题: 如果在 $\int Fdt$ 的一条极值曲线上, $F_2 - F_0 = h$, 那么它也是

$$\int \sqrt{(F_0 + h)F_2}dt$$

的一条极值曲线; 反过来说, 如果一条几何曲线是

$$\int \sqrt{(F_0 + h)F_2}dt$$

的极值曲线, 对于这曲线存在着一种参变量表示法, 使得 $F_2 = F_0 + h$, 并且这样表示后. 这曲线是 $\int Fdt$ 的一条极值曲线.

习题 12.　对于下列用参变量表示的曲面, 确定它的测地线:

$$\begin{cases} x = \text{th}u \cos v, \\ y = \text{th}u \sin v, \\ z = \dfrac{1}{\text{ch}u} + \log\left(\text{th}\dfrac{u}{2}\right). \end{cases}$$

习题 13.　用 2.6 段中的记号, 明白写出:

$$F(u,u') = \sum_{i,j} g_{ij}(u)u_i'u_j' \quad (g_{ij} = g_{ji}).$$

验证 (2.6.4) 可写作

$$\sum_j g_{ij}(u)u_j'' = \frac{1}{2}\sum_{j,k}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j}\right)u_j' u_k'$$

如果把 $(g_{ij}(u))$ 的逆矩阵记作 $(g^{ij}(u))$, 方程 (2.6.5) 可写作

$$\boxed{u_i'' + \sum_{j,k}\Gamma^i_{j,k}(u)u_j'u_k' = 0},$$

其中 "黎曼 – 克里斯托费尔记号" $\Gamma^i_{j,k}$ 由下式确定:

$$\Gamma^i_{j,k} = \frac{1}{2}\sum_h g^{ih}\left(-\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_h} + \frac{\partial g_{hj}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial u_j}\right).$$

习题 14.　对于二次形式

$$\Phi(x,y,x',y') = E(x,y)x'^2 + 2F(x,y)x'y' + G(x,y)y'^2$$

写出黎曼 – 克里斯托费尔记号 $\Gamma^i_{j,k}$ (参看上一习题).

(a) 证明: 使曲线 $y =$ 常数是测地线的必要与充分条件是

$$F\frac{\partial E}{\partial x} + E\frac{\partial E}{\partial y} = 2E\frac{\partial F}{\partial x}.$$

(b) 如果还假定 $F = 0$, 证明 φ 可写成这样的形式: $u'^2 + H(u,v)v'^2$

例.　当 $\varphi = u'^2 + e^{2u}v'^2$ 时, 确定测地线.

习题 15.　设

$$F(a,b,c,d,e) = -\frac{a^2}{d^3e^3} + \frac{bc}{d^2e^2}$$

是对 $de \neq 0$ 确定的五个实变量的函数.

考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的开集 D, 使 $\overline{D}$ 是与坐标轴不相交的带边界的紧集.

(a) 设 f 是 $\overline{D}$ 的邻域内的一个 C^2 类函数. 证明要使 f 是积分

$$I(f) = \iint_D F(f, f'_{t_1}, f'_{t_2}, t_1, t_2)dt_1dt_2$$

的极值曲面的一个必要条件是

$$f - t_1 f'_{t_1} - t_2 f'_{t_2} + t_1t_2 f''_{t_1t_2} = 0. \tag{1}$$

(b) 证明: 如果 f 属于 C^3 类, 函数 $g(t_1,t_2) = f''_{(t_1)^2}(t_1,t_2)$ 满足

$$g - t_2 g'_{t_2} = 0. \tag{2}$$

积分 (2), 并且由此导出 (1) 的通解可写成

$$f(t_1, t_2) = t_1\varphi(t_2) + t_2\psi(t_1),$$

其中 φ 及 ψ 是任意的函数.

(c) 求出 (1) 的这样的解: 在直线 $t_1 = t_2$ 上, 我们有

$$f(t_1, t_2) = t_2^2, \quad f'_{t_1}(t_1, t_2) = t_2.$$

第三章　活动标架法对曲线及曲面论的应用

1. 活 动 标 架

1.1. 微分形式 ω_i 及 ω_{ij} 的定义

现讨论空间 $\mathbb{R}^n$ 中问题. 线性仿射群的变换 T 是由给出的一点 $M \in \mathbb{R}^n$ 及一组向量 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 如下确定: (1) 变换 T 把原点 $O \in \mathbb{R}^n$ 变换成 M; (2) 与 T 相连带的齐次线性变换把 $\mathbb{R}^n$ 中典范基的向量 $(1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1)$ 分别变换成 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$.

给出的点和向量只是满足条件

$$\det(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) \neq 0, \tag{1.1.1}$$

这里表示的是 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 关于典范基的坐标的行列式不等于零. 给出满足 (1.1.1) 的

$$(M, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$$

叫做一个仿射标架; M 叫做标架的 “原点”.

如果我们除掉条件 (1.1.1), 由于 $M, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 都是在 $\mathbb{R}^n$ 中取值, $(M, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ 的集与乘积空间

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n+1\ 个} = \mathbb{R}^{n(n+1)}$$

等同. 条件 (1.1.1) 表明: $\mathbb{R}^{n(n+1)}$ 中满足它的点不属于由

$$\det(\overrightarrow{e}_1, \cdots, \overrightarrow{e}_n) = 0$$

所确定的闭集, 因此仿射标架形成一开集 $U \subset \mathbb{R}^{n(n+1)}$; 并且 $M, \overrightarrow{e}_1, \cdots, \overrightarrow{e}_n$ 是映射 $U \to \mathbb{R}^n$ (由 $\mathbb{R}^{n(n+1)}$ 在它的 $n+1$ 个因子上的 $n+1$ 个投影映射导出). 这些映射显然是可微的.

可以考虑依赖于一个或多个实参变量的标架 $r \in U$. 一种特殊的情形是取 $U \subset \mathbb{R}^{n(n+1)}$ 中点的坐标作为参变量情形; 换句话说, 这是把 r 看作它本身的映射, 也就是点 $r \in U$ 的映射. 一般地, 依赖于参变量的标架 r 叫做 "活动标架"; 我们要讲述由此命名的理论的基础知识.

当在一个巴拿赫空间 (在这里是 $\mathbb{R}^{n(n+1)}$) 中开集 U 内, 有在一个在巴拿赫空间 E 中取值 (在这里是在 $\mathbb{R}^n$ 中取值) 的可微映射 f 时, 我们可考虑微分 df: 这是在 U 内确定、在 E 中取值的一个一次微分形式 (参看第一章, 2.3 段). 因此在标架的开集 U 内, 我们有 $n+1$ 个微分形式, 即

$$dM, d\overrightarrow{e}_1, \cdots, d\overrightarrow{e}_n;$$

这些是在 $\mathbb{R}^n$ 中取值的微分形式. 其中每个有 n 个在 $\mathbb{R}$ 中取值的分量, 而这些分量是取纯量值的微分形式.

现在讲述活动标架论中的一个基本概念, 微分形式 $dM, d\overrightarrow{e}_1, \cdots, d\overrightarrow{e}_n$ 是两个变量 r 及 $\xi(r \in U, \xi \in \mathbb{R}^{n(n+1)})$ 的映射 ω, 这些映射对每个 $r \in U$, 关于 ξ 是线性的, 并且在 $\mathbb{R}^n$ 中取值. 但是对于给定的一个 r, 标架的向量 $\overrightarrow{e}_1(r), \cdots, \overrightarrow{e}_n(r)$ 形成 $\mathbb{R}^n$ 的一个基; 因此 $\omega(r, \xi)$ 的值唯一地可写成线性组合 $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{e}_i(r)$. 纯量 a_i (对于给定的 r) 是 ξ 的线性形式. 于是在 $\mathbb{R}$ 中取值的映射 $a_i(r, \xi)$ 可看作取纯量值的、U 中的一次微分形式. 因此可写出

$$dM = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \overrightarrow{e}_i, \tag{1.1.2}$$

$$d\overrightarrow{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \overrightarrow{e}_j, \tag{1.1.3}$$

约定对于每个标架 $r \in U$, 记号 $\overrightarrow{e}_i$ 表示标架 r 的第 i 个向量的值 $\overrightarrow{e}_i(r)$. 于是我们确定了 $n(n+1)$ 个取纯量值的、U 中的一次微分形式, 即

$$\boxed{\omega_i \ \text{及} \ \omega_{ij}} \quad (1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n).$$

可以说当 r 变动时, 这些形式确定了活动标架 $r \in U$ 的 "无穷小位移".

1.2. 形式 ω_i 及 ω_{ij} 所满足的关系式

我们知道: 如果 f 是 (取向量值的) 可微映射, 我们有 $d(df)=0$ (参看第一章, 定理 2.5.1). 在这里要写出关系式

$$d(dM)=0,\quad d(d\vec{e}_i)=0.$$

对于第一个关系式, 我们要取 (1.1.2) 右边的微分 d, 并应用给出乘积的微分的公式, 由于 ω_i 是一个一次形式, 我们有

$$d(\omega_i\vec{e}_i)=(d\omega_i)\vec{e}_i-\omega_i\wedge d\vec{e}_i.$$

因此, 考虑到 (1.1.3), 由关系式 $d(dM)=0$ 得

$$\sum_{j=1}^{n}(d\omega_j)\vec{e}_j=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\wedge\left(\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}\vec{e}_j\right).$$

既然对于每个标架 r, 向量 $\vec{e}_j(r)$ 形成 $\mathbb{R}^n$ 的一个基, 在上列向量等式中, 两边 $\vec{e}_j$ 的系数必须相等. 由此得

$$\boxed{d\omega_j=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\wedge\omega_{ij}},\quad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{1.2.1}$$

对关系式 $d(d\vec{e}_i)=0$ 作类似计算, 得

$$\boxed{d\omega_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}},\quad 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n. \tag{1.2.2}$$

1.3. 标准正交标架

设有一标架 $r=(M,\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)$; 要使 r 所确定的线性仿射变换 T 是一 (欧几里得) 位移, 必须而且只须与 T 连带的线性齐次变换是*正交群* (保持内积不变的线性齐次变换所组成的群). 为此, 必须而且只须 (这是熟知的) 基 $(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)$ 是*标准正交的*, 这就是说, 向量 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 是*单位的* (欧几里得长度等于 1), 并且两两*正交*. 我们把这些条件写作:

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}\ \ (\text{在 } i=j \text{ 时是 } 1,\ \text{在 } i\neq j \text{ 时是 } 0), \tag{1.3.1}$$

这里 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 表示两个向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的内积. 可以看出 (习题!) 满足条件 (1.3.1) 的标架在所有仿射标架所形成的开集 U 中, 是一个*流形*. 把这流形记作 O.

微分形式 ω_i 及 ω_{ij} "引出" (如我们所谓) 流形 O 上的微分形式. 确切地说: ω_i (例如) 是在 $\mathbb{R}$ 中取值的映射 $\omega_i(r,\xi)$, 这里 $r\in U,\xi\in\mathbb{R}^{n(n+1)}$; 对于固定的 $r,\omega_i(r,\xi)$

是 ξ 的线性映射. ω_i 引出的形式是这映射在 $r \in \mathrm{O}$ 及在 ξ 的限制, 这里 ξ 与流形 O 在点 r 相切 [见第一章, 4.11 段].

当然, 形式 ω_i 及 ω_{ij} 在 O 上引出的形式总是满足关系式 (1.2.1) 及 (1.2.2). 因为此后我们只考虑标准正交标架的流形 O, 所以把 ω_i 及 ω_{ij} 在 O 上引出的形式仍然记作 ω_i 及 ω_{ij}. 还要看到在 O 上, 形式 ω_{ij} 满足一些补充的关系式, 这些是由对关系式 (1.3.1) 求微分而得. 事实上, 我们有

$$\vec{e}_i \cdot d\vec{e}_j + \vec{e}_j \cdot d\vec{e}_i = 0,$$

把 $d\vec{e}_i$ 及 $d\vec{e}_j$ 换成它们在 (1.1.3) 中表示的值, 这就是

$$\vec{e}_i \cdot \left(\sum_k \omega_{jk}\vec{e}_k\right) + \vec{e}_j \cdot \left(\sum_k \omega_{ik}\vec{e}_k\right) = 0.$$

既然 $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$, 我们得到: 无论 i 及 j 取什么值,

$$\boxed{\omega_{ji} + \omega_{ij} = 0}\ ; \tag{1.3.2}$$

并且特别有: 对于任何 i,

$$\boxed{\omega_{ii} = 0}\ . \tag{1.3.3}$$

这就是一个标准正交标架的 "无穷小位移" 所要满足的条件.

我们知道, 如果 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个单位向量、并且两两正交, 就有

$$\det(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) = \pm 1$$

[简单地回忆一下这是为什么: 要使一个 n 行 n 列的矩阵 A 确定正交群 $O(n)$ 中一个变换, 必须而且只须 A 与转置矩阵 ${}^tA$ 的乘积是单位矩阵. 由于 $\det({}^tA) = \det(A)$, 由此得 $(\det(A))^2 = 1$, 从而 $\det(A) = \pm 1$]. 标准正交标架中满足 $\det(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) = +1$ 的叫做正标架; 它们是确定正位移的标架. 正标架的集记作 SO; 所有标准正交标架的流形 O 有两个连通的支流形, 而 SO 是这两个支流形之一. 此后我们只涉及流形 SO 以及在 SO 上引出的微分形式 ω_i 及 ω_{ij}. 我们最常 (简单地) 说到 "标架", 而不说 "正标准正交标架".

1.4. $\mathbb{R}^3$ 中定向曲线的弗雷内标架

我们要就两个例研究标架流形 SO 上的曲线; 换句话说, 我们要考虑可微地依赖于一个实参变量 t 的一族正标准正交标架, 于是 ω_i 及 ω_{ij} 变成变量 t 的微分形式; 在这种情形下, 由于一个变量 t 的任何二次微分形式恒等于零, 方程 (1.2.1) 及 (1.2.2) 不须重视.

本段要讨论第一个例, 它把 $\mathbb{R}^3$ 中一条可微曲线[①] C 与 $\mathbb{R}^3$ 中含一个参变量的一族标准正交标架相联系. 曲线 C 由在 $\mathbb{R}^3$ 中取值的、实变量 t 的可微映射 $M(t)$ 所确定. 对于每个 t, 连带取标架如下: 它的原点是曲线 C 上的点 $M(t)$; 向量 $\overrightarrow{e}_1(t)$ 是与曲线 C 在相应于参变量 t 的点相切的单位向量, 向量指向 t 增加的方向. 既然标架必须是标准正交的及正的, 下面要依次确定 $\overrightarrow{e}_2(t)$ 及 $\overrightarrow{e}_3(t)$.

既然向量 dM/dt 与 $\overrightarrow{e}_1$ 成比例 (假定对于任何 $t, dM/dt \neq 0$), 已可写出

$$dM = \omega_1 \overrightarrow{e}_1; \tag{1.4.1}$$

换句话说, 公式 (1.1.2) 中的形式 ω_2 及 ω_3 是零. 另一方面, 以一种方法选取 $\overrightarrow{e}_2$ 为 t 的可微映射, (由于 $\omega_{11} = 0, \omega_{13} + \omega_{31} = 0$) 我们有

$$d\overrightarrow{e}_1 = \omega_{12}\overrightarrow{e}_2 - \omega_{31}\overrightarrow{e}_3; \tag{1.4.2}$$

因此 $d\overrightarrow{e}_1/dt$ 的值是与 $\overrightarrow{e}_1$ 正交的向量. 作出限制性的假设 $d\overrightarrow{e}_1/dt \neq 0$; 于是我们选取单位向量 $\overrightarrow{e}_2(t)$ 与 $d\overrightarrow{e}_1/dt$ 成比例 [有两种可能选取的方法; 但是一旦对一个值 t 作了选择, 对于邻近 t 的值就可由连续性相应取定了]. 于是对 t 的每个值, 连带得到了一个正标准正交标架 $(M, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$; 我们把它叫做曲线 C 在点 t 的弗雷内标架. 这族含参变量 t 的标架族是由空间 $\mathbb{R}^3$ 中的曲线 C 这样确定的.

由我们对 $\overrightarrow{e}_2$ 所作的选择, 关系式 (1.4.2) 告诉我们有 $\omega_{31} = 0$; 因此标架的运动方程是

$$d\overrightarrow{e}_1 = \omega_{12}\overrightarrow{e}_2, \quad d\overrightarrow{e}_2 = -\omega_{12}\overrightarrow{e}_1 + \omega_{23}\overrightarrow{e}_3, \quad d\overrightarrow{e}_3 = -\omega_{23}\overrightarrow{e}_2. \tag{1.4.3}$$

至于形式 ω_1, 它事先写作 $a(t)dt$; 由 (1.4.1), 我们有

$$\frac{dM}{dt} = a(t)\overrightarrow{e}_1,$$

因此 $a(t) > 0$ 等于向量 dM/dt 的长度. 这表示 $a(t)dt$ 等于曲线 C 的弧 s 的微分 (弧与 t 向同一方向变动). 在 C 上取弧 s (可能加上一个常数外, 是确定的) 作为参变量. 于是微分形式 ω_{12} 及 ω_{23} 可写成 $b(s)ds$ 及 $c(s)ds$. 这样在曲线 C 上引进了两个映射 b 及 c; 作为定义, 它们是曲率及挠率, 分别记作 $1/\rho$ 及 $1/\tau$. 用这些记号, 弗雷内标架的运动方程可写为

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{dM}{ds} = \overrightarrow{e}_1, \\ \dfrac{d\overrightarrow{e}_1}{ds} = \dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{e}_2, \quad \dfrac{d\overrightarrow{e}_2}{ds} = -\dfrac{1}{\rho}\overrightarrow{e}_1 + \dfrac{1}{\tau}\overrightarrow{e}_3, \quad \dfrac{d\overrightarrow{e}_3}{ds} = -\dfrac{1}{\tau}\overrightarrow{e}_2 \end{cases}} \tag{1.4.4}$$

这些关系式是经典的.

[①] 我们把 "可微" 理解为属于 C^k 类, 其中 k 可按需要取得任意大.

1.5. $\mathbb{R}^3$ 中定向曲面 S 上定向曲线 C 的达布标架

一条可微曲线 C 可由在每点 $M \in C$ 选取一个与 C 相切的单位向量来"定向"(这种选取随着 M 连续变动). 对一个曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ (假定 S 是连通的, 属于 C^k 类, 而且 k 充分大) "定向", 按照已给定义 (见第一章, 4.8 段), 必须在每点 $M \in S$ 对 S 的切面定向; 给出两个单位向量 $\overrightarrow{e}_1$ 及 $\overrightarrow{e}_2$ 在 M 与 S 相切并且相互正交, 就在 M 的邻域中对 S 定向. 如果有了这样一组 $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$, 存在着唯一一个单位向量 $\overrightarrow{e}_3$ 与 $\overrightarrow{e}_1$ 及 $\overrightarrow{e}_2$ 正交, 并且使 $\det(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3) = +1$; 反过来, 选取单位向量 $\overrightarrow{e}_3$ 在点 $M \in S$ 与曲面 S 正交, 就可在点 M 的邻域中对 S 定向: 选取 $\overrightarrow{e}_1$ 及 $\overrightarrow{e}_2$, 使得 $\det(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3) = 1$. 总之, 要对 S 定向, 只须在每点 $M \in S$, 从两个与 S 正交的单位向量中, 选取一个; 这种选取法随着 M 连续变动. 此后假定 S 是已定向的 (这就意味着 S 是"可定向的").

设 C 是 $\mathbb{R}^3$ 中定向曲面 S 上的定向曲线. 我们要对每点 $M \in C$ 随着取一个原点是 M 的正的标准正交标架, 叫做 (C 对 S 的) 达布标架. 取与 C 在点 M 相切的单位向量作为 $\overrightarrow{e}_1$, 如同弗雷内标架情形. 然后取与 S 相切于 M、并与 $\overrightarrow{e}_1$ 正交的单位向量 $\overrightarrow{e}_2$, 使得 $\det(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3) = +1$, 这里 $\overrightarrow{e}_3$ 是与 S 正交、并为 S 定向的单位向量. 于是 S 上的曲线 C 确定一族含一个参变量的标架, 就是说在流形 SO 中的一条曲线. 这标架的运动方程可写成

$$\begin{cases} dM = \omega_1 \overrightarrow{e}_1, \\ d\overrightarrow{e}_1 = \omega_{12}\overrightarrow{e}_2 + \omega_{13}\overrightarrow{e}_3, \quad d\overrightarrow{e}_2 = -\omega_{12}\overrightarrow{e}_1 + \omega_{23}\overrightarrow{e}_3, \\ d\overrightarrow{e}_3 = -\omega_{13}\overrightarrow{e}_1 - \omega_{23}\overrightarrow{e}_2. \end{cases} \tag{1.5.1}$$

如果取定向曲线 C 的弧 s 作为参变量, 我们有 $\omega_1 = ds, \omega_{12} = a ds, \omega_{13} = b ds, \omega_{23} = c ds$, 这里 a, b, c 是 C 上的映射. 把它们分别叫做曲线 C 的

测地曲率,

法曲率,

测地挠率

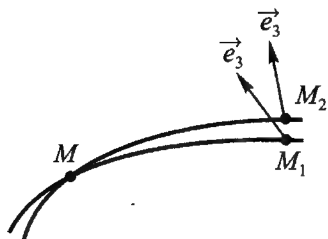
(这些名称稍后将作解释). 因此可写出

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_{12}}{ds} = \text{测地曲率}, \\ \dfrac{\omega_{13}}{ds} = \text{法曲率}, \\ \dfrac{\omega_{23}}{ds} = \text{测地挠率}. \end{cases} \tag{1.5.2}$$

命题 1.5.1. 如果改变 C 的方向, 法曲率和测地挠率不改变, 测地曲率要乘以 -1.

事实上, $\omega_1 = ds$ 要乘以 -1, $\overrightarrow{e}_1$ 及 $\overrightarrow{e}_2$ 也是这样; $\overrightarrow{e}_3$ 不变. 于是关系式 (1.5.1) 表明: ω_{12} 不改变, 而 ω_{13} 及 ω_{23} 要乘以 -1. 由此得结论.

命题 1.5.2. 在一点 $M \in S$, S 上过 M 并且彼此相切的两条曲线有相同的法曲率及相同的测地挠率. (换句话说, 法曲率及测地挠率与 M 点处 S 的每个切线方向相联系).



证. 对于两条在点 M 相切的曲线 C_1 及 C_2, $\overrightarrow{e}_1$ 及 $\overrightarrow{e}_2$ 在 M 有相同的值, de_3/ds 也是这样 (因为在 C_1 及 C_2 上从 M 开始计算, 考虑到 M 有相同弧长的两点 $M_1 \in C_1$ 及 $M_2 \in C_2$, 如果不计二阶无穷小, S 在点 M_1 及点 M_2 的法向量 $\overrightarrow{e}_3$ 相等; 它们的差对于 s 可以略去不计. 事实上, 从 M_1 到 M_2 的距离是二阶无穷小, 并且 S 上一点的法向量 $\overrightarrow{e}_3$ 是这点的可微映射.) 于是 (1.5.1) 中最后的关系式

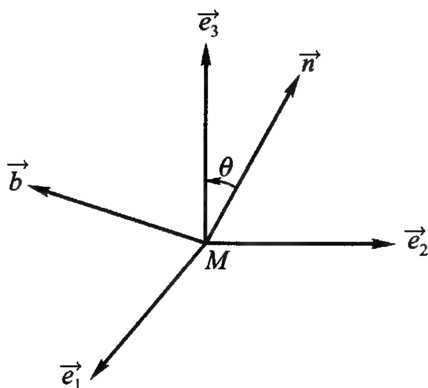
$$\frac{d\overrightarrow{e}_3}{ds} = -\frac{\omega_{13}}{ds}\overrightarrow{e}_1 - \frac{\omega_{23}}{ds}\overrightarrow{e}_2$$

表明对于在点 M 的两曲线, ω_{13}/ds 及 ω_{23}/ds 是相同的. 证完.

注释. 对于 S 上在 M 相切的两条曲线, 测地曲率不一定相同. 例如如果 S 是平面, 可见一条平面曲线的测地曲率就是它 (通常的) 曲率; 我们知道在一点 M 相切的两条平面曲线, 在点 M 不一定有相同的曲率.

1.6. 测地曲率、法曲率及测地挠率的计算

总是设 C 是 $\mathbb{R}^3$ 中定向曲面 S 上的一条定向曲线. 总是设 $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ 是在点 $M \in C$ 的达布标架, 用 $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b})$ 记 C 在 M 的弗雷内标架: 单位向量 $\overrightarrow{n}$ 叫做 C 的 "主法线", $\overrightarrow{b}$ 叫做 "副法线". 曲面的法线 $\overrightarrow{e}_3$ 与 $\overrightarrow{n}$ 所成的角 $(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{e}_3)$ 叫做 θ.



$$\begin{cases} \vec{n} = \vec{e}_2 \sin\theta + \vec{e}_3 \cos\theta, \\ \vec{b} = -\vec{e}_2 \cos\theta + \vec{e}_3 \sin\theta. \end{cases} \tag{1.6.1}$$

由此反过来,

$$\begin{cases} \vec{e}_2 = \vec{n} \sin\theta - \vec{b} \cos\theta, \\ \vec{e}_3 = \vec{n} \cos\theta + \vec{b} \sin\theta. \end{cases} \tag{1.6.2}$$

由弗雷内标架的运动方程, 我们有

$$\frac{d\vec{e}_1}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n} = \frac{\sin\theta}{\rho}\vec{e}_2 + \frac{\cos\theta}{\rho}\vec{e}_3,$$

由此与 (1.5.1) 相比较, 得:

$$\boxed{\begin{aligned} \text{测地曲率} &= \frac{\sin\theta}{\rho}, \\ \text{法曲率} &= \frac{\cos\theta}{\rho}. \end{aligned}} \tag{1.6.3}$$

(ρ 表示曲线 C 的曲率半径).

还要计算测地挠率 ω_{23}/ds, 由 (1.5.1), 我们有

$$\frac{\omega_{23}}{ds} = \vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{ds} = (\vec{n}\cos\theta + \vec{b}\sin\theta) \cdot \frac{d}{ds}(\vec{n}\sin\theta - \vec{b}\cos\theta).$$

作计算; 由弗雷内标架运动方程:

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\vec{e}_1 + \frac{1}{\tau}\vec{b}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{1}{\tau}\vec{n},$$

我们得到

$$\vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{ds} = \frac{1}{\tau} + \frac{d\theta}{ds}.$$

于是

$$\boxed{\text{测地挠率} = \frac{1}{\tau} + \frac{d\theta}{ds}}.$$

习题. *默斯尼埃定理.* 我们表明 “法曲率” $(\cos\theta)/\rho$ 只依赖于曲线 C 在点 $M \in C$ 的切线. 因此: (1) 如果 S 上通过 M 的两曲线有同一切线及同一密切面, 它们就有同一曲率半径 (由于 $\cos\theta$ 对这两曲线有同一值, 而且同样 $(\cos\theta)/\rho$ 对这两曲线也有同一值); (2) 如果平面 P 绕着与 S 相切于一点 $M \in S$ 的直线旋转, 在 P 截出的 S 的截面上, (在点 M 的) 曲率中心描出通过 M 的一圆.

注释. (i) 考虑与 S 在点 $M \in S$ 的切面正交的平面; 设 C 是这平面与 S 相交的曲线. 对于这条曲线, 我们有 $\theta = 0$, 因此 C 的曲率 $1/\rho$ 等于 C 在 M 的切线方向的 “法曲率”. 于是 “法曲率” 是*法截面* (通过所考虑切线的法平面与 S 的截面) 的*曲率*.

(ii) 我们知道通过一点 $M \in S$ 有一条并且只有一条 S 的测地线与已给直线 (与 S 相切) 相切. 对于一条测地线, 我们总是有 $\theta = 0$ 或 π , 因此 $d\theta/ds = 0$; 于是这种曲线的测地挠率等于 $1/\tau$. 总之: *在 S 的切线方向的测地挠率等于与这方向相切的测地线的挠率.*

(iii) 说一条曲线是测地线, 就是说 $\sin\theta = 0$; 因此*测地线是测地曲率是零的曲线.*

(iv) 如果 S 是平面, 并且 C 是这平面上的曲线, 我们有 $\theta = \pi/2$ (对于适当选取的向量 $\overrightarrow{n}$), 因此 $(\sin\theta)/\rho = 1/\rho$: 测地曲率就是 C 的曲率.

2. 与 $\mathbb{R}^3$ 中曲面相联系的含三个参变量的标架族

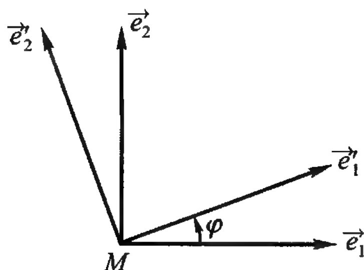
2.1. 定向曲面的标架流形

设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 是 C^k 类曲面 (k 充分大), 并假设它是*定向的*. 用 $R(S)$ 表示满足下列条件的所有正标准正交标架的集: 原点 M 属于 S, 向量 $\overrightarrow{e}_3$ 与 S 正交 ($\overrightarrow{e}_3$ 的方向与 S 的定向一致). 如果把每个标架与它的原点相联系, 就确定了一个连续映射

$$p : R(S) \to S,$$

这显然是满射. 一点 $M \in S$ 的*纤维*是逆像 $p^{-1}(M)$, 它由所有原点是 M 的标架组成; 一个这样的标架由选取在点 M 与 S 相切的一个单位向量 $\overrightarrow{e}_1$ 确定 (因为一旦 $\overrightarrow{e}_1$ 已知, 由于 $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ 必须是正的, 于是 $\overrightarrow{e}_2$ 就确定了). 所有以 M 为原点的标架可以通过围绕向量 $\overrightarrow{e}_3$ 的平面旋转相互导出. 准确地说, 考虑平面上围绕原点的旋转群 $SO(2)$ (含两个变量的正交、有行列式 $+1$ 的实线性变换群); 这群中的元素由角 φ (以带有模 2π 的实数度量) 确定. 群 $SO(2)$ *在标架空间 $R(S)$ 中运作*: 已给一标架 $(M, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$, 我们知道围绕 $\overrightarrow{e}_3$ 作角 φ 的旋转是怎样的; 我们得到下面各式确定的一个标架 $(M', \overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}'_3)$:

$$\begin{cases} M' = M, \quad \overrightarrow{e}'_1 = \overrightarrow{e}_1 \cos\varphi + \overrightarrow{e}_2 \sin\varphi, \quad \overrightarrow{e}'_2 = -\overrightarrow{e}_1 \sin\varphi + \overrightarrow{e}_2 \cos\varphi, \\ \overrightarrow{e}'_3 = \overrightarrow{e}_3 \end{cases} \tag{2.1.1}$$



我们看到: 映射 $p : R(S) \to S$ 的纤维就是群 $SO(2)$ 在 $R(S)$ 中运作的*轨道*, 并且在每条纤维中, $SO(2)$ *以简单可递的方式运作着* (已给有相同原点的两个标架, 存在着一个、并且只有一个旋转把第一个标架变换成第二个).

映射 $p: R(S) \to S$ 提供了所谓 "纤维空间" 的一个例子; 这里不打算讲述纤维空间论, 甚至也不打算给出确切的定义.

现在说明可以怎样用参数表示 $R(S)$ 中原点 M 与已给点 $M_0 \in S$ 充分接近的标架集. 为了明确概念, 假定过 $M_0 \in \mathbb{R}^3$ 的垂直线不与 S 在 M_0 相切, 因而在 M_0 的邻域内, S 可用下列方程表示:

$$z = f(x, y), \quad f \text{ 属于 } C^k\text{类}$$

(用 x, y, z 表示 $\mathbb{R}^3$ 中的坐标). 于是在与 M_0 邻近的每点 M, 存在着唯一一个单位向量与 S 相切, 并且它在平面 $z = 0$ 上的射影与向量 $(1, 0, 0)$ 平行; 这个向量 $\vec{e}_1(M)$ 是 M 的 C^{k-1} 类映射. 这样对与 M_0 邻近的每点 $M \in S$, 连带着有一个以 M 为原点的标准正交标架; 换句话说, 我们确定了一个连续映射

$$\sigma: S \to R(S),$$

使得 $p \circ \sigma = S$ 的恒等映射; σ 就是标架纤维空间的所谓*截面*. 设点 M 与 M_0 邻近; 以 M 为原点的每个标架 $r \in R(S)$ 由下列给出的点与角确定:

(1°) 点 $M \in S$;

(2°) 要使标架 $(M, \vec{e}_1(M), \vec{e}_2(M), \vec{e}_3(M))$ 与 r 重合所必须旋转的角 φ.

换句话说, 考虑 M_0 的充分小的邻域 V; 原点 M 属于 V 的标架空间可用乘积空间 $V \times SO(2)$ 中的一点表示. 特别, 空间中标架依赖于 3 个实参变数. 可以证明: 它们形成 $\mathbb{R}^3$ 中所有标架 (标准正交或否) 的空间内一个 3 维、C^{k-1} 类的*子流形* (它们也形成 $\mathbb{R}^{12}$ 中一个开集; 参看第 1 节). [这留给读者作为习题.] 于是映射 $p: R(S) \to S$ 属于 C^{k-1} 类; 上面确定的截面 $\sigma: S \to R(S)$ 属于 C^{k-1} 类.

如果 α 是曲面 S 上的微分形式, $p^*(\alpha)$ 是流形 $R(S)$ 上的微分形式. 我们记得 $R(S)$ 上的微分形式是映射 $\omega(r, \tau)$ [其中 $r \in R(S)$, 并且 τ 与 $R(S)$ 在 r 相切], 它对每个 r 是 τ 的线性映射; 要使这微分形式是 $p^*(\alpha)$ 型的, 必须而且只须: (1) 对于每个 $r, \omega(r, \tau)$ 只依赖于向量 τ 的射影 $\xi = p(\tau)$, 而 τ 是与 S 在点 $M = p(r)$ 相切的向量; (2) 还有 $\omega(r, \xi)$ 只与标架 r 的原点 $M = p(r)$ 有关. 我们简单地说: *ω 是曲面 S 的微分形式*.

这些概念以下将在例子中表明.

2.2. 曲面上标架的运动方程

在含三个参变量的标准正交标架族 $R(S)$ 中, 这种标架的运动方程 (参看 (1.1.2), (1.1.3), (1.3.2) 及 (1.3.3)) 在流形 $R(S)$ 上引进了微分形式 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$. 可是因为对于每个标架 $r = (M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, 微分形式 dM 在标架 r 的向量 $\vec{e}_1$ 及

$\overrightarrow{e}_2$ 所生成的 S 的切面中取值, 所以 $\omega_3=0$. 于是运动方程是

$$dM=\omega_1\overrightarrow{e}_1+\omega_2\overrightarrow{e}_2, \tag{2.2.1}$$

$$\begin{cases} d\overrightarrow{e}_1=\omega_{12}\overrightarrow{e}_2+\omega_{13}\overrightarrow{e}_3, \\ d\overrightarrow{e}_2=-\omega_{12}\overrightarrow{e}_1+\omega_{23}\overrightarrow{e}_3, \\ -d\overrightarrow{e}_3=\omega_{13}\overrightarrow{e}_1+\omega_{23}\overrightarrow{e}_2. \end{cases} \tag{2.2.2}$$

另一方面, 可积条件 (参看 (1.2.1) 及 (1.2.2)) 特别给出 [考虑到 $\omega_3=0$ 这一事实]:

$$d\omega_1=-\omega_2\wedge\omega_{12}, \quad d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12}, \tag{2.2.3}$$

$$\omega_1\wedge\omega_{13}+\omega_2\wedge\omega_{23}=0, \tag{2.2.4}$$

$$d\omega_{12}=-\omega_{13}\wedge\omega_{23}. \tag{2.2.5}$$

ω_1 及 ω_2 的解释. 我们记得微分 dM 是在 $\mathbb{R}^3$ 中取值的微分 1 形式, 它把每个向量 $\overrightarrow{\xi}$ 与同一向量 $\overrightarrow{\xi}$ 联系着. 因此如果 r 是一标架 $\in R(S)$, 并且如果 $\overrightarrow{e}_1(r)$ 及 $\overrightarrow{e}_2(r)$ 是这标架的前两个向量, 那么微分 1 形式 $\omega_1(r,\xi)$ 及 $\omega_2(r,\xi)$ 是线性形式, 它们把与 S 在标架原点 $M(r)$ 相切的每个向量 $\overrightarrow{\xi}$ 与它关于基 $\overrightarrow{e}_1(r)$ 及 $\overrightarrow{e}_2(r)$ 的坐标联系起来. ω_1 及 ω_2 是 $r\in R(S)$ 的映射, 把它们看作标架流形 $R(S)$ 上的微分形式; 对于每个 r, 它们只依赖与 S 在点 $M(r)\in S$ 相切的向量 $\overrightarrow{\xi}$:

$$\overrightarrow{\xi}=\omega_1(r,\xi)\overrightarrow{e}_1(r)+\omega_2(r,\xi)\overrightarrow{e}_2(r). \tag{2.2.6}$$

因此与 S 在点 $M(r)$ 相切的向量 $\overrightarrow{\xi}$ 的长度的平方等于

$$|\overrightarrow{\xi}|^2=(\omega_1(r,\xi))^2+(\omega_2(r,\xi))^2.$$

这把我们导向引入记号 $(\omega_1)^2$ 作为微分形式 ω_1 的*平方*: 这不是直到这里所理解意义下的微分 2 形式 [这就是说, r 在空间 E_1 中取值的一个映射, 这里 E_1 是 S 在点 $M(r)$ 处的切空间上*交错双线性形式*所构成的空间], 但这是 r 的一个映射, 取值在这切空间上*二次形式*的空间中: $(\omega_1(r,\xi))^2$ 是线性形式 $\omega_1(r,\xi)$ 的平方.

定义. 二次微分形式 $(\omega_1)^2+(\omega_2)^2$ *叫做曲面 S 的第一基本二次形式*. 这种形式把每点 $M\in S$, 及在点 M 与 S 相切的每个向量 $\overrightarrow{\xi}$, 与 $\overrightarrow{\xi}$ 的长度的平方联系起来. 它不依赖于有原点 M 的标架, 但只依赖于标架的原点.

这一二次形式通常叫做曲面的 ds^2. 这种称谓的理由是: 如果考虑 S 上的定向曲线 C, 引入在 C 上的这形式是曲线 C 的微分 1 形式 ds 的平方. 当 S 上的点的坐标 x,y,z 用两个参变数 u 及 v 表示出时, 我们有

$$ds^2=E(u,v)du^2+2F(u,v)dudv+G(u,v)dv^2,$$

其中

$$\begin{cases} E=\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}, \\ G=\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

2.3. 曲面 S 的面积元素

S 已定向, 面积元素是一个微分 2 形式 (参看第一章, 4.12 段). 即这样的形式: 对于与 S 在点 M 相切的一对向量 ξ_1 及 ξ_2, 连带着取

$$\det(\overrightarrow{\xi}_1, \overrightarrow{\xi}_2, \overrightarrow{e}_3).$$

由 (2.2.6), 这式等于

$$\omega_1(\xi_1)\omega_2(\xi_2)-\omega_1(\xi_2)\omega_2(\xi_1).$$

然而这是微分形式

$$\omega_1\wedge\omega_2$$

在一对向量 (ξ_1,ξ_2) 上的值, 即 ω_1 与 ω_2 的外乘积. 于是有:

命题 2.3.1. *形式 $\omega_1\wedge\omega_2$ 等于曲面的面积元素.*

在第一章中已经看到 (公式 4.12.6): 当曲面 S 按照其定向取参变数 u 及 v, ds^2 的系数是 E,F,G 时, 微分形式 $\omega_1\wedge\omega_2$ 等于 $\sqrt{EG-F^2}du\wedge dv$.

与二次形式 $\omega_1^2+\omega_2^2$ 一样, 形式 $\omega_1\wedge\omega_2$ 是曲面 S 的一个微分形式 (参看 2.1 段末).

2.4. 曲面 S 的第二基本二次形式

对于每个 $M\in S$, 微分形式 $d\overrightarrow{M}$ 及 $-d\overrightarrow{e}_3$ (在 $\mathbb{R}^3$ 中取值) 是与 S 在点 M 相切的向量 $\overrightarrow{\xi}$ 的线性映射. 它们的内积

$$(d\overrightarrow{M})\cdot(-d\overrightarrow{e}_3)$$

是 S 的切空间中向量 $\overrightarrow{\xi}$ 的二次形式. 由定义, 这就是曲面 S 的第二基本二次形式. 容易算出: 由 (2.2.1) 及 (2.2.2), 我们有

$$\boxed{(d\overrightarrow{M})\cdot(-d\overrightarrow{e}_3)=\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}}\,. \tag{2.4.1}$$

[在上式右边, $\omega_1\omega_{13}$ 必须不要与外乘积 $\omega_1\wedge\omega_{13}$ 相混淆; 对于每个 $r\in R(S)$, 并且对于与 $R(S)$ 在点 r 相切的每个向量 τ, $\omega_1\omega_{13}$ 等于乘积

$$\omega_1(r,\tau)\omega_{13}(r,\tau),$$

可是对于每个 r 以及每对 $(\tau_1, \tau_2), \omega_1 \wedge \omega_{13}$ 等于

$$\omega_1(r, \tau_1)\omega_{13}(r, \tau_2) - \omega_1(r, \tau_2)\omega_{13}(r, \tau_1).]$$

用法曲率对第二基本二次形式的解释. 设 C 是 S 上的定向曲线, 并取它的弧长 s 作为参变量. 达布标架的运动方程 (参看 (1.5.1)) 告诉我们: 内积

$$\left(\frac{d\overrightarrow{M}}{ds}\right) \cdot \left(-\frac{d\overrightarrow{e}_3}{ds}\right)$$

等于 C 在点 $M \in C$ 的法曲率; 这就表明: 第二基本形式 $d\overrightarrow{M} \cdot (-d\overrightarrow{e}_3)$ 在与 C 相切的向量 $\overrightarrow{\xi}$ 上的值等于 $|\overrightarrow{\xi}|^2$ 与 C 的法曲率的乘积. 由此得:

命题 2.4.1. *在一点 $M \in S$, 第二基本二次形式在与 S 相切于点 M 的一个向量 $\overrightarrow{\xi} \neq 0$ 上的值等于 $|\overrightarrow{\xi}|^2$ 与向量 $\overrightarrow{\xi}$ 方向上法曲率的乘积.*

2.5. 已定方向上法曲率及测地挠率的计算

在用 ω_1 对关系式 (2.2.4) 作外乘法后, 就得到

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0;$$

这表明对于每个 $r \in R(S)$, 三个线性形式 $\omega_1, \omega_2, \omega_{23}$ (在 $R(S)$ 的切空间上) 是线性相关的. 然而由 (2.2. 6), ω_1 及 ω_2 是线性无关的. 因此 ω_{23} 是 ω_1 及 ω_2 的线性组合:

$$\omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2,$$

其中 b 及 c 是标架 r 的映射. 这特别证明了对于每个标架 r, ω_{23} 真是 S 在点 $M(r)$ 的切空间上一个线性形式.

同样, 我们有

$$\omega_{13} = a\omega_1 + b'\omega_2,$$

其中 a 及 b' 是 r 的映射. 但是如果写 (2.2.4), 就得到

$$b'\omega_1 \wedge \omega_2 + b\omega_2 \wedge \omega_1 = 0,$$

既然形式 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 不是零, 由此得:

$$\boxed{b = b'}.$$

总之, 我们有

$$\boxed{\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2}, \tag{2.5.1}$$

于是在标架的空间 $R(S)$ 上, 引进了三个映射 a, b, c. 下面要对它们作出解释.

首先, (2.4.1) 告诉我们, 第二基本二次形式等于

$$\boxed{\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23}=a(\omega_1)^2+2b\omega_1\omega_2+c(\omega_2)^2}\,. \tag{2.5.2}$$

如果与 S 在点 $M(r)$ 相切的一个向量 $\overrightarrow{\xi}$ 与标架 r 的向量 $\overrightarrow{e}_1(r)$ 组成角 φ, 我们显然有

$$\omega_1(r,\overrightarrow{\xi})=|\overrightarrow{\xi}|\cos\varphi,\quad \omega_2(r,\overrightarrow{\xi})=|\overrightarrow{\xi}|\sin\varphi;$$

因此第二基本二次形式对于 $\overrightarrow{\xi}$ 的值是

$$|\overrightarrow{\xi}|^2(a\cos^2\varphi+2b\sin\varphi\cos\varphi+c\sin^2\varphi).$$

由命题 2.4.1 得:

命题 2.5.1. 在与标架 r 中向量 $\overrightarrow{e}_1$ 成角 φ 的方向, 法曲率等于

$$\boxed{a(r)\cos^2\varphi+2b(r)\sin\varphi\cos\varphi+c(r)\sin^2\varphi}\,. \tag{2.5.3}$$

系. $a(r)$ 是标架 r 中向量 $\overrightarrow{e}_1$ 方向的法曲率, 并且 $c(r)$ 是标架 r 中向量 $\overrightarrow{e}_2$ 方向的法曲率.

我们这样解释了映射 a 及 c. 还要解释 b. 为此, 要在与标架 r 中向量 $\overrightarrow{e}_1$ 成角 φ 的方向, 计算测地挠率. 考虑 S 上以弧长 s 作为参变量的曲线 C; 设 $M\in C$, 设 $r=(M,\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2,\overrightarrow{e}_3)$ 是以 M 为原点的标架, 并且设 φ 是与 C 相切的单位向量 $\overrightarrow{e}'_1$ 与 $\overrightarrow{e}_1$ 所成的角; 设 $\overrightarrow{e}'_2$ 是与 $\overrightarrow{e}'_1$ 成角 $+\pi/2$ 的单位切向量. C 的达布标架 $(M,\overrightarrow{e}'_1,\overrightarrow{e}'_2,\overrightarrow{e}_3)$ 的运动方程告诉我们, C 的测地挠率等于下式中 $\overrightarrow{e}'_2$ 的系数:

$$-\frac{d\overrightarrow{e}_3}{ds}=\alpha\overrightarrow{e}'_1+\beta\overrightarrow{e}'_2.$$

在 (2.2.2) 的第三个关系式中, 用 $\overrightarrow{e}'_1\cos\varphi-\overrightarrow{e}'_2\sin\varphi$ 代替 $\overrightarrow{e}_1$, 用 $\overrightarrow{e}'_1\sin\varphi+\overrightarrow{e}'_2\cos\varphi$ 代替 $\overrightarrow{e}_2$ [参看 (2.1.1)], 得

$$\beta=-\frac{\omega_{13}}{ds}\sin\varphi+\frac{\omega_{23}}{ds}\cos\varphi,$$

把 ω_{13} 及 ω_{23} 用它们在 (2.5.1) 中的值代替, 把 ω_1 用 $ds\cos\varphi,\omega_2$ 用 $ds\sin\varphi$ 代替, 我们求得

$$\begin{aligned}\beta&=-(a\cos\varphi+b\sin\varphi)\sin\varphi+(b\cos\varphi+c\sin\varphi)\cos\varphi\\&=b(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+(c-a)\sin\varphi\cos\varphi.\end{aligned}$$

由此得:

命题 2.5.2. 在与标架 r 中向量 $\vec{e}_1$ 成角 φ 的方向, 测地挠率等于

$$\boxed{b\cos 2\varphi + \frac{c-a}{2}\sin 2\varphi}. \tag{2.5.4}$$

系. $b(r)$ 是标架 r 中向量 $\vec{e}_1$ 方向上的测地挠率, 向量 $\vec{e}_2$ 方向上的测地挠率是 $-b(r)$ [取 $\varphi = \pi/2$].

更一般地, 把 φ 换成 $\varphi + \pi/2$ 得下列结果:

命题 2.5.3. 在一点 $M \in S$, 切平面上两正交方向上测地挠率的值是相反数.

回到公式 (2.5.3); 把 φ 换成 $\varphi + \pi/2$ 表明在方向 φ 及 $\varphi + \pi/2$ 上的法曲率的和与 φ 无关. 换句话说,

命题 2.5.4. 在标架 r 中向量 $\vec{e}_1(r)$ 及 $\vec{e}_2(r)$ 方向, 法曲率的和 $a(r) + c(r)$ 只与标架 r 的原点 M 有关.

定义. $a(r) + c(r)$ 叫做曲面 S 在点 M 的平均曲率.

2.6. 主方向; 曲率线

要使在点 M 处与 S 相切的所有方向, 测地挠率是零, 必须而且只须, 对于原点是 M 的一个特别标架 r, 两个数量 $b(r)$ 及 $c(r) - a(r)$ 是零: 这是从给出测地挠率的表示式 (2.5.4) 得到的. 如果情况是这样, 我们说点 M 是曲面 S 的一个*脐点*. 由 (2.5.3), 于是在点 M 处所有切线方向, 法曲率相同. *习题*: 反过来, 如果在 M 处所有切线方向, 法曲率相同, M 就是一个脐点.

命题 2.6.1. 如果 M 不是曲面 S 的脐点, 那么恰好有两个切线方向, 在这两方向测地挠率是零; 并且这两方向正交.

由 (2.5.4), 显然: 要使测地挠率在方向 φ 是零, 必须而且只须

$$\mathrm{tg}2\varphi = \frac{2b}{a-c};$$

由于 b 及 $a - c$ 不会同时是零, 上式给出了 $\mathrm{tg}2\varphi$ 的一个确定的 (有限或无穷) 值. 由此得上列命题.

定义. 如果测地挠率在两个 (正交) 方向是零, 这两方向就叫做 (在所考虑的点 $M \in S$ 的) *主方向*. 在脐点, 可约定说所有切线方向都是主方向.

在一个非脐点的点 $M_0 \in S$ 的邻域内, 在每点 M 的主方向构成两个切线方向场.

定义. 设曲线 C 在曲面 S 上. 如果在任何点 $M \in C, C$ 的切线是主方向, 那么 C 就叫做 S 的*曲率线*.

如果假定 S 属于 C^k 类 (k 充分大), 主方向场就属于 C^1 类; 因此可应用微分方程理论, 于是得到: *通过已给点 M_0 (非脐点), 有两条相互正交的曲率线.*

曲率线显然是这样的曲线: 在它上面每点, 测地挠率是零. 用 1.6 段 (公式 (1.6.4)) 中的记号, 这性质可用下式表示

$$\frac{1}{\tau}+\frac{d\theta}{ds}=0, \tag{2.6.1}$$

这里 $1/\tau$ 表示曲率线的挠率, θ 表示曲面的法向量 $\vec{e}_3$ 与曲率线的主法线所成的角. *习题*: 条件 (2.6.1) 表明: 当 M 描出曲率线 C 时, 在 C 上所有点的法线生成一个 "可展曲面" —— 或者说法线与一固定的曲线相切.

我们往往把在一点 $M\in S$ 的两个切线主方向上法曲率的值记作 $1/R_1$ 及 $1/R_2$. 自然不知道什么是 R_1, 什么是 R_2. $1/R_1$ 及 $1/R_2$ 两数叫做在点 M 的*主曲率*. 对于一个脐点, $1/R_1$ 与 $1/R_2$ 相等, 而且也等于任何方向法曲率的值. 命题 2.5.4 告诉我们, *在两个正交方向的法曲率的和等于* $1/R_1+1/R_2$ (在点 M 的平均曲率).

在点 M 取一标架, 使向量 $\vec{e}_1$ 及 $\vec{e}_2$ 与主方向相切. 表达式 (2.5.3) 表明: 在与 $\vec{e}_1$ 成角 φ 的方向上法曲率等于

$$\boxed{\frac{1}{R_1}\cos^2\varphi+\frac{1}{R_2}\sin^2\varphi}$$

(把 $\vec{e}_1$ 方向上法曲率叫做 $1/R_1$, $\vec{e}_2$ 方向上法曲率叫做 $1/R_2$). 如果 $\vec{r}$ 是与上一标架成角 φ 的标架, 于是我们有

$$\begin{cases} a(r)=\dfrac{1}{R_1}\cos^2\varphi+\dfrac{1}{R_2}\sin^2\varphi, \\ c(r)=\dfrac{1}{R_1}\sin^2\varphi+\dfrac{1}{R_2}\cos^2\varphi, \\ b(r)=\left(\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_1}\right)\sin\varphi\cos\varphi \quad [\text{由 } (2.5.4)]. \end{cases}$$

由此导出

$$a(r)c(r)-b(r)^2=\frac{1}{R_1R_2}.$$

从而有:

命题 2.6.2. 与每个标架 r 相关联的数量 $ac-b^2$ 只与标架的原点 M 有关, 并且等于主曲率 $1/R_1$ 及 $1/R_2$ 的乘积. 把它叫做曲面 S 在点 M 的*全曲率*.

2.7. 测地曲率的微分形式

这与微分形式 ω_{12} 有关: 事实上, 我们记得, 如果在 S 上有曲线 C, 并且考虑与 C 上各点相关的达布标架所确定 $R(S)$ 的曲线 Γ, ω_{12} 在 Γ 上所导出的形式等于 ds/ρ_g, 在这里把 C 上弧记作 ds, 把测地曲率记作 $1/\rho_g$. 曲线 Γ 叫做 C 在 $R(S)$ 中的 "标准提升".

定理 2.7.1. 测地曲率的形式 ω_{12} 是满足方程 (2.2.3):

$$d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12}, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}$$

的唯一一次微分形式 (在 $R(S)$ 上).

证. 如果我们有另一形式 ω'_{12} 满足同样的方程, 形式 $\alpha = \omega_{12} - \omega'_{12}$ 满足

$$\omega_2 \wedge \alpha = 0, \quad \omega_1 \wedge \alpha = 0.$$

这表明 α 与 ω_2 成比例, 也与 ω_1 成比例. 然而 ω_1 与 ω_2 不成比例, 因此必然有 $\alpha = 0$. 证完.

我们要证明曲面 S 上曲线 C 的测地曲率是曲面的 ds^2 的不变量. 确切地有:

命题 2.7.2. 设 $f : S \to S'$ 是从曲面 S 到曲面 S' 上的一个微分同胚. 假定 f 保持长度不变 (即把 S 的 ds^2 变换成 S' 的弧长微分的平方). 于是如果 C 是 S 上的定向曲线, 并且如果 $C' = f(C)$, 那么 C 在一点 $M \in C$ 的测地曲率等于 C' 在点 $f(M)$ 的测地曲率.

证. 因为导出映射 f' 把与 S 相切的每个向量变换成与 S' 相切、并有相同长度的向量 (由假设), 所以 f 把每个标准正交标架 $\in R(S)$ 与一个标准正交标架 $\in R(S')$ 联系着. 由此可见, 变量代换 f 把 ($R(S')$ 中的) 形式 ω'_1 及 ω'_2 变换成 ($R(S)$ 中的) 形式 ω_1 及 ω_2. 因此这一变量代换把 $d\omega'_1$ 变换成 $d\omega_1$, 把 $d\omega'_2$ 变换成 $d\omega_2$. 于是由唯一性定理 2.7.1, 就得到它把 ω'_{12} 变换成 ω_{12}. 证完.

现在要应用关系式 (2.2.5), 但要把其中 ω_{13} 及 ω_{23} 用 (2.5.1) 所给出它们的值来代替. 我们得到

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= -(a\omega_1 + b\omega_2) \wedge (b\omega_1 + c\omega_2) \\ &= -(ac - b^2)\omega_1 \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

已知 $\omega_1 \wedge \omega_2$ 是面积元素, 以后把它记作 $d\sigma$ (二次微分形式). 另一方面, $ac - b^2$ 就是全曲率 (命题 2.6.2). 于是得:

定理 2.7.3. 测地曲率形式的外微分 $d\omega_{12}$ 等于微分 2 形式 $-d\sigma/R_1R_2$, 即面积元素与全曲率反号的乘积.

2.8. 标架场的应用

假定在 S 上存在着一个 "标架场", 即 $r : S \to R(S)$ 中一个充分可微的集 (参看 2.1 段). 与一点 $M \in S$ 相连带的标架 $r(M)$ 是由与 S 在点 M 相切的单位向量 $\overrightarrow{e}_1(M)$ (以及与 $\overrightarrow{e}_1(M)$ 成角 $+\pi/2$ 的 $r(M)$ 的向量 $\overrightarrow{e}_2(M)$) 确定的. 引入标架场, $R(S)$ 与 $S \times SO(2)$ 等同, 如同在 2.1 段中所看到的那样: 任何标架 r 由它的原点 $M \in S$ 以及 r 的第一个向量 $\overrightarrow{e}_1$ 与标架场中向量 $\overrightarrow{e}_1(M)$ 所成的角 φ 确定.

我们注意只要把 S 用参变量表示, 也就是有从开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (坐标 u, v) 到 S 上的一个微分同胚 Φ, 就有相应的标架场. 事实上, 导出映射 $\Phi'(u,v)$ 把 (u,v) 平面上的向量 (1,0) 变换成与 S 在点 $M=\Phi(u,v)$ 相切的一个向量 $\vec{\xi}$; $\vec{\xi} \neq 0$, 并且确定唯一一个与 $\vec{\xi}$ 成比例的单位向量 $\vec{e}_1(M)$ (比值 >0).

应用标架场, S 等同于 $R(S)=S\times SO(2)$ 的一个子流形, 即场中标架的子流形. 设 $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2$ 及 $\overline{\omega}_{12}$ 是 $\omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ 在 S 上导出的微分形式, 由 (2.2.3), 我们有

$$d\overline{\omega}_1 = -\overline{\omega}_2 \wedge \overline{\omega}_{12}, \quad d\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_{12}. \tag{2.8.1}$$

下面可看出 (2.11 段): 知道了 $\overline{\omega}_1$ 及 $\overline{\omega}_2$, 由这些关系式可决定 $\overline{\omega}_{12}$.

引理 2.8.1. 我们有

$$\boxed{\omega_{12} = \overline{\omega}_{12} + d\varphi}.$$

证. 上式是由下列公式得到:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{e}_1(M)\cos\varphi + \vec{e}_2(M)\sin\varphi, \\ \vec{e}_2 = -\vec{e}_1(M)\sin\varphi + \vec{e}_2(M)\cos\varphi, \\ \omega_{12} = \vec{e}_2 \cdot d\vec{e}_1, \\ \overline{\omega}_{12} = \vec{e}_2(M)\cdot d\vec{e}_1(M) = -\vec{e}_1(M)\cdot d\vec{e}_2(M). \end{cases}$$

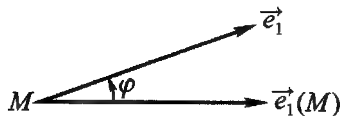
计算是容易的.

作为引理的推论, 我们有

$$d\overline{\omega}_{12} = d\omega_{12} = -\frac{d\sigma}{R_1 R_2}. \tag{2.8.2}$$

2.9. 沿曲线的平行移动

我们总是作出 2.8 段中的假设 (标架场存在). 设 Γ 是 $R(S)$ 中 C^1 类定向曲线; 它是由下列两项确定的: 1° 给出 S 上一条定向曲线 C, 即标架原点的轨迹; 2° 对每点 $M\in C$, 给出角 φ, 即 Γ 的标架与场的标架 $(\vec{e}_1(M), \vec{e}_2(M))$ 在点 M 所成的角.



把曲线 C 用它的弧长 s 作为参变量, 那么 $\Gamma \subset R(S) \approx S\times SO(2)$ 也用参变量 s 表示. 微分形式 ω_{12} 在 Γ 上导出不难算出的一个微分形式: 由引理 2.8.1, 它是 $\overline{\omega}_{12}$ 及 $d\varphi$ 导出的形式的和.

曲线 C 假定是已给的, 那么 $\overline{\omega}_{12}$ 导出的形式已知有 $a(s)ds$ 这一形状, 其中 a 是已知函数. 现在要探求是否可选取一个 s 的函数作为 φ, 使得 ω_{12} 在 Γ 上导出的形式是零. 条件应是

$$d\varphi + a(s)ds = 0. \tag{2.9.1}$$

因此必须而且只须 $\varphi(s)$ 是 $-a(s)$ 的原函数. 这样, 问题是可能的, 并且除了可能加一常数外, $\varphi(s)$ 是唯一的.

定义. 如果 φ 满足 (2.9.1), 就说在 C 上各点向量 $\vec{e}_1$ 的场是沿 C 的平行场. 由上所述, 沿已给曲线 C 的平行场由在点 $M_0 \in C$ 处单位切向量的 (任意) 选取所确定; 于是我们说在任一点 $M \in C$ 处的场中向量, 是从点 M_0 处已给向量沿 C 平行移动而得.

平行移动对定向曲线 C 的测地曲率提供一种简单的解释. 在每点 $M \in C, \theta$ 是与 C 相切的单位向量与标架场的向量 $\vec{e}_1(M)$ 所成的角. 这切向量是曲线 C 的达布标架的向量; 达布标架形成 $R(S)$ 中一条曲线 (C 在 $R(S)$ 中的"标准提升"), 而且 ω_{12} 在这条曲线上导出的形式等于

$$\overline{\omega}_{12} + d\theta = a(s)ds + d\theta = d(\theta - \varphi),$$

和上面一样, φ 确定沿 C 的一个平行场. 然而已知在 C 的标准提升上, ω_{12} 导出的形式等于 ds/ρ_g, 其中 $1/\rho_g$ 表示 C 的测地曲率. 由此得

$$\boxed{\frac{1}{\rho_g} = \frac{d(\theta - \varphi)}{ds}}. \tag{2.9.2}$$

C 的测地曲率等于角 $\theta - \varphi$ 关于弧长 s 的导数, 这里 $\theta - \varphi$ 是 C 的定向切线与沿 C 平行场中向量所求的角.

特别, *测地线是这样的曲线 C : C 上各点处单位切向量所成的场是一平行场.*

2.10. 全曲率与平行移动的关系

总是假定在曲面 S 上存在着一个标架场.

取一环路作为曲线 C (C 的终点与它的起点 M_0 重合). 取与 S 在点 M_0 相切的一个单位向量, 并且使这向量沿 C 作平行移动. *即令环路与一点同伦, 回到点 M_0 时, 得到的不一定是出发时的同一向量.* 更确切地, 设 γ 是分段 C^1 类的环路, 它是*一个紧集 δ 的定向边界.* [注意: 这就导致 δ 与一紧圆盘同胚, 但在这里不证明这一事实. 由此可见 γ 与一点同伦.] 如果 φ 是确定沿着 γ 平行移动的角, 由 2.9 段,

$$\int_\gamma d\varphi = -\int_\gamma \overline{\omega}_{12}.$$

由斯托克斯定理, 上式等于

$$-\iint_\delta d\overline{\omega}_{12},$$

因此由 (2.8.2), 它等于

$$\iint_\delta \frac{d\sigma}{R_1 R_2}.$$

由此得基本关系式:

$$\boxed{\int_\gamma d\varphi = \iint_\delta \frac{d\sigma}{R_1 R_2}}. \tag{2.10.1}$$

上式左边是场中向量沿着环路 γ 平行转动的总角度 (在每一时刻, 角 φ 是对于标架场中的标架测定的). 因此可以说沿环路 γ 的平行移动产生转动, 其角度等于全曲率 $1/R_1R_2$ 关于面积元素 $d\sigma$ 在 δ 上的重积分.

于是再看 2.9 段中的记号: θ 表示与 γ 在点 M 相切的单位向量与标架场中向量 $\vec{e}_1(M)$ 所成的角. 由 (2.9.2), 我们有

$$d\varphi = d\theta - \frac{ds}{\rho_g},$$

于是 (2.10.1) 变成

$$\int_\gamma \frac{ds}{\rho_g} = \int_\gamma d\theta - \iint_\delta \frac{d\sigma}{R_1 R_2}. \tag{2.10.2}$$

为了写上式, 隐含地假定了 γ 是 C^2 类曲线. 如果 γ 是由有限条 C^2 类弧 γ_i 组成, 这些弧在角点 P_i 处衔接, 在该处 γ 的单位切向量的角有间断 θ_i, 那么关系式 (2.10.2) 必须理解如下:

$$\sum_i \int_{\gamma_i} \frac{ds}{\rho_g} = \sum_i \int_{\gamma_i} d\theta - \iint_\delta \frac{d\sigma}{R_1 R_2}. \tag{2.10.3}$$

我们承认下列引理, 但不作证明, 其中涉及平面的拓扑性质:

引理 2.10.1.　用上面的记号, 我们有

$$\sum_i \int_{\gamma_i} d\theta + \sum_i \theta_i = 2\pi.$$

直观地, 上式左边是与 γ 相切的单位向量转动的总角度, 每个时刻角度是对标架场的向量 $\vec{e}_1(M)$ 计算的. 由于在每个时刻角度 θ 是以模 2π 确定的, 事先料到, 上式左边必然是 2π 的整数倍. 引理断定它恰好是 2π.

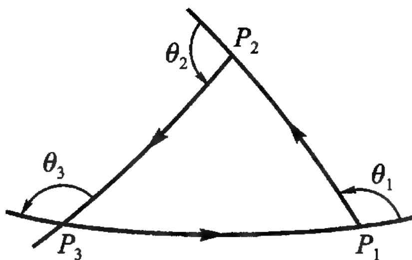
读者可证明: 当曲面 S 是平面时, 情况确实是这样; 还可看出: 当 δ 是圆盘, γ 是定向圆周, 即这圆盘的边界, 于是沿正向描出圆周时, 圆周的切线转动 2π 角度. 一般情形的证明大体来说, 在于用适当的变换化到特殊情形.

由引理 2.10.1 及关系式 (2.10.3) 得:

定理 2.10.2. (高斯 – 博内).　在上列假设下, 我们有

$$\boxed{\sum_i \int_{\gamma_i} \frac{ds}{\rho_g} + \sum_i \theta_i = 2\pi - \iint_\delta \frac{d\sigma}{R_1 R_2}}. \tag{2.10.4}$$

特殊情形.　假定 γ 是一测地三角形, 即 γ 由 3 条测地线的弧 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 组成. 把这三角形的角记作 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (都在 0 与 π 之间). 显然有



$$\theta_i = \pi - \alpha_i,$$

而由于 γ_i 的测地曲率是零,

$$\int_{\gamma_i} \frac{ds}{\rho_g} = 0.$$

于是由 (2.10.4) 得

$$3\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2\pi - \iint_\delta \frac{d\sigma}{R_1 R_2},$$

或

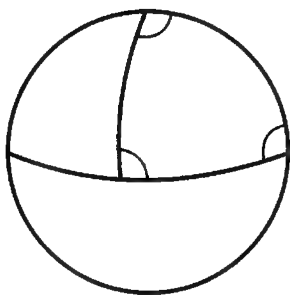
$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \iint_\delta \frac{d\sigma}{R_1 R_2}}. \tag{2.10.5}$$

由此得:

系 2.10.3. *测地三角形三角的和减 π 等于全曲率在三角形内的积分.*

球面三角形的例. 设 S_2 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面. 在 S_2 上任何点, 全曲率等于 1 (所有点都是脐点, 曲率等于 1). 按定义, "球面三角形" 是 S_2 上的测地三角形; 它的边是大圆弧. 在球面三角形上, 总是存在着 "标架场" [事实上, 存在着一点 $P \in S_2$ 不属于球面三角形; 以 P 为极的球极平面射影把一个平面变换成 $S_2 - \{P\}$, 并且把平面中向量 $(\neq 0)$ 场变换成 $S_2 - \{P\}$ 上的向量 $(\neq 0)$ 场]. 因此可应用系 2.10.3: *球面三角形三角的和, 减去 π, 等于这三角形的面积.* 这结果有用初等几何方法作出的一个证明 [见阿达马的《初等几何论》].

例如考虑在 S_2 上, 由顶点在球心的三直角三面角所割出的球面三角形. 这是三角都是直角的三角形, 因此它的面积等于 $\pi/2$. 这与球面 S_2 是八个互相邻接的这种三角形的并集这一事实相符合.



2.11. 用第一基本形式计算曲面的全曲率

总是假定在 S 上有一标架场, 并且保留 2.8 段中的记号. 既然微分形式 $\overline{\omega}_1$ 及 $\overline{\omega}_2$ 在 S 上每点是线性无关的, 形式 $\overline{\omega}_{12}$ 可以用唯一的方式写成

$$\overline{\omega}_{12} = \lambda_1\overline{\omega}_1 + \lambda_2\overline{\omega}_2. \tag{2.11.1}$$

要用 (2.8.1) 计算映射 λ_1 及 λ_2. 事实上, 由 (2. 11.1) 及 (2.8.1) 得

$$d\overline{\omega}_1 = \lambda_1\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2, \quad d\overline{\omega}_2 = \lambda_2\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2. \tag{2.11.2}$$

如果知道 $\overline{\omega}_1$ 及 $\overline{\omega}_2$, 可计算 $d\overline{\omega}_1$ 及 $d\overline{\omega}_2$, 于是 λ_1 及 λ_2 (S 上的映射) 由 (2.11.2) 给出. 然后, 知道了 $\overline{\omega}_{12}$, 可算出 $d\overline{\omega}_{12}$, 并且由

$$d\overline{\omega}_{12} = -\frac{1}{R_1R_2}\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2 \quad (\text{参看 (2.8.2)}), \tag{2.11.3}$$

就得到了全曲率.

因此只是回到要计算微分形式 $\overline{\omega}_1$ 及 $\overline{\omega}_2$. 它们是映射 $\overline{\omega}_i(M, \overrightarrow{\xi})$, 其中 $\overrightarrow{\xi}$ 是与 S 在点 M 相切的向量: 已给 $M, \overline{\omega}_1(M, \overrightarrow{\xi})$ 及 $\overline{\omega}_2(M, \overrightarrow{\xi})$ 是向量 $\overrightarrow{\xi}$ 在基 $(\overrightarrow{e}_1(M), \overrightarrow{e}_2(M))$ 中的坐标.

当我们有了用参变量 (u, v) 所作下列参变量表示式后, 就可作出完整的计算:

$$ds^2 = (Adu)^2 + (Bdv)^2, \text{ 其中 } A \text{ 及 } B \text{ 是 } (u, v) \text{ 的函数, 取值 } > 0. \tag{2.11.4}$$

在 S 上, 取与 (u, v) 平面上常向量 $(1, 0)$ 的场相对应的向量场. 于是

$$\overline{\omega}_1 = Adu, \quad \overline{\omega}_2 = Bdv.$$

我们有

$$d\overline{\omega}_1 = -\frac{\partial A}{\partial v}du \wedge dv, \quad d\overline{\omega}_2 = \frac{\partial B}{\partial u}du \wedge dv,$$
$$\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2 = ABdu \wedge dv,$$

由此代入 (2.11.2), 得

$$\lambda_1 = -\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial v}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial u}.$$

于是由 (2.11.1) 得

$$\overline{\omega}_{12} = -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial v}du + \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial u}dv,$$

由此得

$$d\overline{\omega}_{12} = \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial u}\right)\right] du \wedge dv,$$

并且 (2.11.3) 最后给出

$$\boxed{\frac{1}{R_1R_2} = -\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial u}\right)\right]}. \tag{2.11.5}$$

当 ds^2 有 (2.11.4) 的形状时, 这就是给出全曲率的公式.

习题

活动标架习题

记号还是用本章中采用的.

在下面, 曲面 (S) 表示 $\mathbb{R}^3$ 中属于 C^k 类的 $(k \geqslant 2)$ 2 维连通可微流形.

习题 1. 设向量 $\overrightarrow{u}$ 在与曲面 (S) 相切于点 M 的平面内. 证明在 $\overrightarrow{u}$ 的方向 (S) 的法曲率由下式给出:

$$\rho_n = \frac{1}{R_n} = \frac{a\omega_1^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2},$$

其中形式 ω_1 及 ω_2 是在 $\overrightarrow{u}$ 上算出的.

证明在 M 的主方向是使 $1/R_n$ 取极值的方向. 由此导出: 对于在 M 的一个主方向 $\overrightarrow{u}$, 我们有

$$\frac{1}{R} = \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{\omega_1} = \frac{b\omega_1 + c\omega_2}{\omega_2}.$$

这里 $1/R$ 是关于 $\overrightarrow{u}$ 的主曲率, 形式 ω_1 及 ω_2 是在 $\overrightarrow{u}$ 上算出的.

由此导出 (S) 上曲率线的微分方程是

$$b(\omega_1^2 - \omega_2^2) + (c-a)\omega_1\omega_2 = 0.$$

习题 2. 当 $\overrightarrow{e}_1$ 及 $\overrightarrow{e}_2$ 是在 M 处主方向的单位向量时, 活动标架的方程是怎样的? *这样的标架下面要系统地用到*; a, b, c 表示在相应的标架族上的映射, 或同样可说是在曲面 S 上的映射.

习题 3. 如果在 (S) 上一点 $M, a = b = c = 0$, 那么 M 就叫做扁平点. 证明所有点都是扁平点的闭曲面 (S), 必然是一平面.

习题 4. 在习题 2 的标架中, 研究全曲率 $K = ac - b^2$ 是零的曲面 (S).

证明 ω_{13} 或 ω_{23} 是零. 在 $\omega_{23} \neq 0, \omega_{13} = 0$ 情形, 证明在 (S) 上局部存在着一个映射 u, 使得 $\omega_{23} = du$, 并且研究活动标架沿着线 $v =$ 常数的位移. 由此导出 (S) 是可展曲面. 在特殊情形 $\omega_{12} = 0$, 证明 (S) 是柱面.

习题 5. (S) 上一点 M 使 $a = c = \rho \neq 0$, 并且使 $b = 0$. 那么这点就叫做一个脐点. 设 (S) 是一闭曲面, 它的所有点都是脐点. 证明 $d\rho \wedge \omega_1 = d\rho \wedge \omega_2 = 0$, 并且由此证明 (S) 是半径为 $1/|\rho|$ 的球面.

习题 6. 设闭曲面 (S) 的平均曲率 $H = a + c$ 等于 1, 并且全曲率 $K = ac - b^2$ 是零. 证明 (S) 是半径为 1 的正圆柱面.

按照习题 2 及 4 中的提示, 考虑 $\omega_{13} = 0$ 情形.

证明在 (S) 上局部存在着独立的映射 u 及 v, 使得

$$\begin{cases} d\overrightarrow{M} = du\overrightarrow{e}_1 + dv\overrightarrow{e}_2; & d\overrightarrow{e}_2 = dv\overrightarrow{e}_3, \\ d\overrightarrow{e}_1 = 0, & d\overrightarrow{e}_3 = -dv\overrightarrow{e}_2, \end{cases}$$

并且作出结论.

习题 7. 证明在紧曲面 (S) 上, 存在着一点 M, 在这点全曲率 $K=ac-b^2$ 是严格正的. 设 O 是 $\mathbb{R}^3$ 中一点, 并且 M 是 (S) 上一点, 使 OM 是极大. 要证明上述结论, 只要证明 (S) 的第二基本形式在点 M 是负定的.

如果平均曲率 $H=a+c$ 在 (S) 上任何点是零, (S) 就叫做极小曲面. 是否存在着紧极小曲面?

习题 8. 采用习题 2 中的标架, 证明: 如果在点 M, 我们有 $da=dc=0$, 那么在点 M, 或者有 $a=c$, 或者有 $\omega_{12}=0$. 由此导出: 设在曲面 (S) 上, 全曲率是严格正的常数 $K>0$, 那么在非脐点, 主曲率不可能有相对极大或极小.

习题 9. 应用习题 8 及 5, 证明: 如果紧曲面 (S) 的全曲率是严格正的常数, 那么 (S) 是球面.

习题 10. 如果闭曲面 (S) 没有脐点, 并且如果 $H=a+c$ 及 $K=ac-b^2$ 是常数, 那么 (S) 是正圆柱面. 是否有全曲率是严格负常数的极小曲面? 应用习题 8 及 6.

习题 11. *球面映射*. 对 (S) 的任何点 M, 使它与点 $\mu\in\sum$ 相对应, 这里 $\sum$ 是心为 0、半径为 1 的球面, 而且 $\overrightarrow{O\mu}=\overrightarrow{e}_3$. 映射 $f:S\to\sum$ 使得 $f(M)=\mu$; 这样确定的映射叫做从 (S) 到 $(\sum)$ 的球面映射.

(a) (S) 在 M 的切平面 $T_M(S)$ 与 $(\sum)$ 在 μ 的切平面 $T_\mu(\sum)$ 取作平行, $(\sum)$ 在 μ 的第一基本形式自然引导出 $T_M(S)$ 上的一个二次形式. 计算这二次形式成为 a,b,c,ω_1,ω_2 的映射. 这样得到的二次形式叫做 (S) 在 M 的第三基本二次形式.

(b) 同样, f 在 M 的导出映射 f' 自然诱导出从切平面 $T_M(S)$ 到它本身的一个线性映射 L. L 叫做 (S) 在 M 的韦因加滕 (Weingarten) 映射. 应用给出 $d\overrightarrow{M}$ 及 $d\overrightarrow{e}_3$ 的公式, 在 $T_M(S)$ 的基 $(\overrightarrow{e}_1,\overrightarrow{e}_2)$ 中, 计算 L 的矩阵成为 a,b,c 的映射, 并且由此导出 L 是 (S) 在 M 的第一基本形式的一个对称算子.

(c) 计算 L 的特征值、特征向量、迹以及行列式, 并且解释所得结果的几何意义. 给出 f 是从 (S) 到 $(\sum)$ 上的局部微分同胚的条件.

(d) 把 (S) 在 M 的第一、第二、第三基本形式分别叫做 $\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III}$, 证明 $\forall\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}\in T_M(S)$, 我们有

$$\begin{cases}\mathrm{II}(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=-\mathrm{I}(L\cdot\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=-\mathrm{I}(\overrightarrow{X},L\cdot\overrightarrow{Y})\\ \mathrm{III}(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=\mathrm{I}(L^2\cdot\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y})=\mathrm{I}(L\cdot\overrightarrow{X},L\cdot\overrightarrow{Y})=\mathrm{I}(\overrightarrow{X},L^2\cdot\overrightarrow{Y})\end{cases}$$

(要用 a,b,c,ω_1,ω_2 的映射来解释给出 II 及 III 的公式).

(e) $H=a+c$ 及 $K=ac-b^2$ 分别是 (S) 在 M 的平均曲率及全曲率, 证明:

$$L^2+HL+K\cdot Id=0\quad (Id\ 是\ T_M(S)\ 的恒等映射).$$

由此导出 $\mathrm{III}-H\cdot\mathrm{II}+K\cdot\mathrm{I}=0$.

习题 12.　(续上题) 设 $f: S \to \sum$ 是球面映射; 如果 $\forall \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in T_M(S)$, 在 (S) 上存在着一个严格正映射 $u(M)$, 使得

$$\mathrm{I}(L\cdot\overrightarrow{X}, L\cdot\overrightarrow{Y}) = \mathrm{III}, \quad (\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) = u(M)\mathrm{I}(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}),$$

那么 f 就叫做严格保形的.

证明: 如果 (S) 是紧的, (S) 是一球面, 并且如果 (S) 是非紧的, (S) 是有严格负全曲率 $-u(M)$ 的极小曲面.

(应用习题 5 及 7 中的结果, 解释 a, b, c 之间所找到的关系式.)

习题 13.　(续上题). 证明如果 $\mathrm{I} = \mathrm{II}$, 或 $\mathrm{I} = \mathrm{III}$, 如果 (S) 是闭的, 那么 (S) 是半径为 1 的球面, 并且反过来也正确. (如果 $\mathrm{II} = \mathrm{III}$, 证明如果 (S) 是闭的, 那么 (S) 是半径为 1 的球面, 平面, 或半径为 1 的正圆柱.)

习题 14.　平行曲面. 设有曲面 (S). 考虑曲面 (S_r), 即点 $\varphi(M) = M_r = M + r\overrightarrow{e}_3$ 的轨迹, 这里 $M \in (S)$, 并且 r 是一常数.

(a) 考虑标架 $(M_r, \overrightarrow{e}'_1, \overrightarrow{e}'_2, \overrightarrow{e}'_3)$, 它是从标架 $(M, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ 通过平移 $r\overrightarrow{e}_3$ 得到的. 计算 (S_r) 上按新标架的形式 $\overline{\omega}_i, \overline{\omega}_{ij}$, 把它们用标架 $(M, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ 中形式 ω_i 及 ω_{ij} 的映射来表示.

(b) 证明: 如果 H, K 及 r 中的某一条件成立, 那么可以把到 (S_r) 在 M_r 的主方向, 主曲率, 平均曲率, 全曲率以及 3 个基本形式, 表示为 (S) 在 M 处相应元素的映射.

(c) 切平面 $T_M(S)$ 及 $T_{M_r}(S_r)$ 是平行的, φ 在 M 的导出映射 φ' 自然诱导出从 $T_M(S)$ 到它本身的一个线性映射 F. 求 F 在基 $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2$ 中的矩阵, 把它用 a, b, c 及 r 的映射表示出来. 用 F 的映射解释所得到的关于 b 的条件, 并且证明在这种情形下, φ 是从 S 到 S_r 上的局部微分同胚. S_r 在 M_r 的韦因加滕映射 (习题 11) 也自然诱导出 $T_M(S)$ 的一个线性映射. 如果 L 是 (S) 在 M 的韦因加滕映射, 证明 $L_r \cdot F = F \cdot L_r = L$, 并且这样就可简单地得到 (b) 中的结果.

习题 15.　证明如果映射 $\varphi: S \to S_r$ (习题 14) 是严格保形的, 并且如果 (S) 还是闭的, 那么 (S) 或是一球面, 或是一平面, 或是无脐点、并且平均曲率是常数 $H = 2/r$ 的一曲面.

习题 16.　确定在 $\mathbb{R}^3$ 中开集 U 内的三重正交系是这样的曲面族: 通过 U 中每点 M, 恰好有族中 3 个曲面, 而且它们在 M 的法线相互正交. 证明三重正交系中的曲面沿着它们的曲率线相交.

为此, 要研究标准正交活动标架 $(M, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ 的位移, 这里 $M \in U$, 并且 $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ 分别是通过 M 的 3 个曲面 S_1, S_2, S_3 的法线.

如同在 1.1 段, 令

$$d\overrightarrow{M} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \overrightarrow{e}_i \quad 及 \quad d\overrightarrow{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \overrightarrow{e}_j (i = 1, 2, 3).$$

证明可以写出

$$\omega_{23} = a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2 + a_{13}\omega_3,$$
$$\omega_{31} = a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2 + a_{23}\omega_3,$$
$$\omega_{12} = a_{31}\omega_1 + a_{32}\omega_2 + a_{33}\omega_3,$$

然后让 M 在 (S_3) 上移动, 证明 $a_{11} = -a_{22}$. 由此导出 $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, 并且应用习题 2 证明 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ 是曲面 $(S_1), (S_2), (S_3)$ 在 r 的主方向.

习题 17. 证明一族同心球面自然是无穷个三重正交系的一部分, 并且由此证明 $\mathbb{R}^3$ 中保形微分同胚把球面变换成球面.

积分的习题

习题 18. 应用方程 (1.4.4), 证明如果 $\mathbb{R}^3$ 中曲线 C 的挠率与曲率成比例 $(\rho/\tau = k)$, 那么曲线 C 对于方向 $\vec{u}$ 是螺旋线, 下面将确切说明 (如果曲线的切线与一个固定的方向 $\vec{u}$ 成一定的角, 就说这曲线是对于方向 $\vec{u}$ 的螺旋线).

特殊情形. 假定 $\rho = \tau = (1+s)\sqrt{2}$, 证明 C 是确定的, 但可能差一位移; 当对于 $s = 0$, 加上初始条件

$$e_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right), \quad e_2 = \left(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0\right), \quad e_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1/\sqrt{2}\right)$$

时, 求 C 的方程.

习题 19. 应用习题 2 中的标架, 证明: 如果 $\omega_1 = du$, 即 $v =$ 常数同时是曲率线及测地线, 参看第二章习题 14, 那么这些曲线是平面曲线 (证明 ω_{12} 与 ω_2 成比例).

特别研究旋转曲面, 证明在这种情形下, a 及 c 只是 u 的函数.

反过来, 假定对于曲面 (S), 我们有 $\omega_1 = du, a = \varphi(u), c = \psi(u)$. 证明可选取参变量 v, 使得 $\omega_2 = H(u)dv$, 其中 H 只与 u 有关.

证明

$$\omega_{12} = \frac{H'(u)}{H(u)}\omega_2, \quad 以及 \quad H'^2 + C^2H^2 = 常数.$$

于是将方程组 $de_i = \sum_j \omega_{ij}e_j$ 及 $dM = \sum_i \omega_i e_i$ 积分, 并且证明曲面 (S) 是旋转曲面.

习题 20. 用上题中的方法求出满足下列条件的曲面 $(S): \omega_1 = du, a = \varphi(u), c = \psi(u)$, 其中 $\varphi(u) + \psi(u) = 0$.

证明求得的旋转曲面的经线是悬链线.

索引　上编：微分学

(索引中的数字依次为章、段号)

索引　下编：微分形式

(索引中的数字依次为章、段号)

外国人名译名对照表

B

S. Banach　巴拿赫
J. L. F. Bertrand　贝特朗
P. O. Bonnet　博内
N. Bourbaki　布尔巴基

C

E. Cartan　E. 嘉当
H. Cartan　H. 嘉当
A. L. Cauchy　柯西
E. B. Christoffel　克里斯托费尔
G. Choquet　肖盖
A. C. Clairaut　克莱罗
Coulomb　库伦

D

J. R. d'Alembert　达朗贝尔
G. Darboux　达布
R. Descartes　笛卡儿

E

Euclid　欧几里得; 欧氏
L. Euler　欧拉

F

P. de Fermat　费马
J. F. Frenet　弗雷内
F. G. Frobenius　弗罗贝尼乌斯

G

C. F. Gauss　高斯
H. G. Grassmann　格拉斯曼
G. Green　格林

H

J. Hadamard　阿达马
W. R. Hamilton　哈密顿
F. Hélein　埃兰
D. Hilbert　希尔伯特

J

C. G. J. Jacobi　雅可比

K

L. Kronecker　克罗内克
J. Kouneiher　库奈埃

L

J. L. Lagrange　拉格朗日
H. Lebesgue　勒贝格
R. Lipschitz　李普希茨
N. Lobachevski　罗巴契夫斯基

M

J. B. M. Meusnier　默斯尼埃
A. F. Möbius　默比乌斯

O

M. V. Ostrogradski　奥斯特罗格拉茨基

P

P. Painlevé　班勒卫
H. Poincaré　庞加莱

R

J. F. Riccati　黎卡提
M. Rolle　罗尔

S

H. A. Schwarz　施瓦茨
J. A. Serret　塞内特
G. G. Stokes　斯托克斯

V

V. Volterra　沃尔泰拉

W

J. Weingarten　韦因加滕
J. M. Wronski　朗斯基

译后记

本书作者亨利 · 嘉当先生 (1904 — 2008) 是法国著名数学家, 并且是法国布尔巴基学派的主要创建人之一. 在上世纪中叶, 在该学派推动下, 法国进行了数学教学改革. 经亨利 · 嘉当先生建议, 欧洲教师协会于 1960 年 10 月 3 日到 5 日在巴黎举行了一次讨论会, 参加人员有西欧几个国家的数学家, 在会议上制定了大学数学专业基础课程的大纲. 这份大纲发表在瑞士杂志《数学教学》(*Enseignement Mathématique*), 8 (1962) 的 79 ~ 187 页上. 还制定了大学应用数学专业基础课程的大纲. 上世纪 60 年代初, 关肇直先生译出了这两份大纲, 译者同时也译出了数学专业的大纲, 并曾将译稿油印, 请我国数学同行参阅. 这些大纲与我国大学数学专业课程当时采用的大纲及法、俄、英、美过去的相应大纲有很大差异, 对于其后各国数学教学改革深有影响.

1980 年到 1994 年, 根据中法两国政府关于交流的协议, 在武汉大学建立了中法数学中心及中法数学班, 目的是推进我国的数学教学改革及扩大我国数学的研究领域. 中法数学班对中国大学本科数学专业学生的专业课程, 完全按照法国大纲教学; 还举办过研究生班. 这些对我国大学数学专业的教学改革及人才培养, 起了一定的推动作用. 作为法国科学院资深院士, 嘉当先生赞赏并支持武汉大学中法数学交流, 并且在 1985 年及 1987 年两次领衔与居斯塔夫 · 肖盖及洛朗 · 希瓦尔茨院士共同上书法国总统密特朗, 申述这一交流的成效及重要性, 请求批准继续交流.

H. 嘉当先生所著本书及《解析函数论初步》(Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes) (有中译本由余家荣译, 高等教育出版社, 2008 年), 是根据他在上世纪五、六十年代所授课程编写的, 其中在当时颇多新意. 过去中法数学班所授微分学及解析函数两课程, 就包含了这两书中部分内容.

嘉当先生对数学及数学的教学改革作出了重要贡献, 特别对我国数学的发展作

出了贡献.

谨以此书的出版纪念亨利 · 嘉当先生.

余家荣
2008 年 10 月于武汉市

法兰西数学精品译丛

• 数学天元基金资助项目 •

注：书号前缀为 978-7-04-0×××××-×

书号	书名	著译者
★24308-6	解析函数论初步	H. 嘉当
★25156-2	微分学	H. 嘉当
	广义函数论	L. 施瓦兹
★25801-1	微分几何	M. 伯杰、B. 戈斯丢
	拓扑学教程	G. 肖盖
	代数教程	R. 戈德曼
★25155-5	谱理论讲义	J. 迪斯米埃
★24619-3	拟微分算子和 Nash-Moser 定理	S. 阿里纳克、P. 热拉尔
	解析数论	G. 特伦鲍姆
	概率与位势	C. 德拉歇利、P. 梅耶

说明：加★者已出版.